<u>Задача 1</u>. Совершенно бесхитростная задача на проценты. Пусть в городе X живет x человек, в городе Y – y человек, в психбольницах – z человек. Запишем общее количество, проголосовавших за каждую партию. Теперь главное – не раскрывать скобки! Поделим каждое уравнение на общую численность населения в стране и введем новые переменные (a, b, c) – доли жителей, голосовавших на разных избирательных участках:

$$\begin{cases} 0.375x + 0.425y + z = 0.708(x+y+z) \\ 0.3125x + 0.4y = 0.164(x+y+z) \\ 0.225x + 0.15y = 0.096(x+y+z) \\ 0.0875x + 0.025y = 0.032(x+y+z) \end{cases} <=> \begin{cases} 0.375a + 0.425b + c = 0.708 \\ 0.3125a + 0.4b = 0.164 \\ 0.225a + 0.15b = 0.096 \\ 0.0875a + 0.025b = 0.032 \end{cases}$$

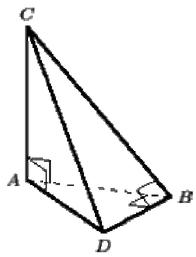
Найдем a, b из последних двух уравнений: вычтем их, домножив первое из них на 5, а второе на 30: $\begin{cases} (1.125 - 2.625)a = 0.48 - 0.96 \\ 0.15b = 0.096 - 0.225a \end{cases}$, откуда

$$\begin{cases} a = \frac{0.48}{1.5} = 0.32 = 32\% \\ b = \frac{0.096 - 0.072}{0.15} = \frac{24}{150} = 0.16 = 16\% \end{cases}$$

Ну, а теперь найдем долю граждан в психбольницах: 100-32-16=52. Теперь осталось не забыть (!) проверить, что первым двум уравнениями системы эти числа удовлетворяют. Забыть об этом означает, согласиться с утверждением «если по двум последним партиям нет фальсификаций, то и по лидирующим тоже нет».

Ответ: 52%

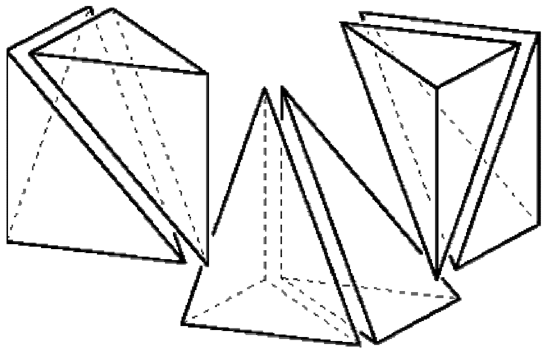
<u>Задача 2.</u>

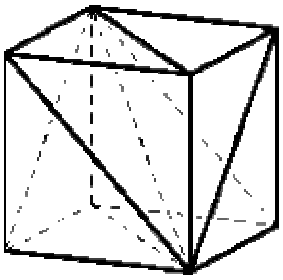


Да, можно.

Возьмём, к примеру, тетраэдр *ABCD*, показанный на рис.
В нём *CA* = *AB* = *BD* и $\angle CAB = \angle CAD = \angle ABD = \angle CBD = 90^\circ$.
Возможны несколько способов замощения пространства такими тетраэдрами.

Решение 1. Тетраэдр *ABCD* и симметричный ему относительно плоскости *ADC* образуют четырехугольную пирамиду с квадратным основанием, одно из боковых ребер которой перпендикулярно основанию и равно его стороне (рис.). Из трех таких пирамид можно составить куб, как показано на рис. Очевидно, что кубами пространство замостить можно.





Решение 2. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, образованную центром куба и его гранью. У нее есть четыре плоскости симметрии, разрезающие ее на 8 тетраэдров, подобных *ABCD*. Следовательно, куб можно разрезать на 48 таких тетраэдров.

Решение 3. Объединив тетраэдр *ABCD* и симметричный ему относительно плоскости *ABC*, получим тетраэдр, основанием которого является равнобедренный прямоугольный треугольник, а высотой - боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла. Из двух таких тетраэдров, симметричных относительно общей боковой грани, составим тетраэдр с равнобедренным прямоугольным треугольником в основании и высотой, падающей в середину гипотенузы. Наконец, из двух таких тетраэдров можно составить тетраэдр, подобный *ABCD*. (Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать *ABCD* по плоскости, проходящей через *A*, *B* и середину *CD*.) Таким образом, из 8 тетраэдров, равных *ABCD*, можно составить подобный им тетраэдр вдвое большего размера. Повторяя этот процесс, получим искомое замощение пространства.

Задача 3.

Решение 1. Скользкое, но простое.

Докажем, что $(1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{99}+x^{100})=1+x^2+x^4+\dots+x^{200}$. Действительно, при $x=\pm 1$ равенство очевидно, а при прочих x проведем такие преобразования: $\left(1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{99}+x^{100}\right)=$

$$=\frac{1+x^{101}}{1+x}\cdot\frac{1-x^{101}}{1-x}=\frac{1-x^{202}}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\dots+x^{200}$$

Решение 2. Функциональное.

$$f(x)=\left(1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{99}+x^{100}\right)$$

$$f(-x)=\left(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{99}+x^{100}\right)\left(1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100}\right)=f(x)$$

Значит, *f(x)* – четная функция, а многочлен является четной функцией тогда и только тогда, когда в его стандартном виде нет слагаемых нечетной степени.

Решение 3.Элементарное.

$$\left(1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{99}+x^{100}\right)=$$

$$=\left(1+x^2+x^4+\dots+x^{98}+x^{100}-x\left(1+x^2+x^4+\dots+x^{98}\right)\right)\times$$

$$\left(1+x^2+x^4+\dots+x^{98}+x^{100}+x\left(1+x^2+x^4+\dots+x^{98}\right)\right)=$$

$$=\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{98}+x^{100}\right)^2-x^2\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{98}\right)^2$$

Задача 4. ***Решение 1. Примитивное.*** Составим табличку:

	Проголосовали за партию рыцарей	Проголосовали за партию лжецов
Количество рыцарей	a	b
Количество лжецов	c	d

Тогда партия лжецов набрала $\frac{b+d}{N}=0.7$, но при участии в exit poll'е $\frac{b+c}{N}=0.5$ указали, что голосовали за партию лжецов. Тогда $b+d=0.7N,\ b+c=0.5N,\ a+c=0.3N,$ где $N=a+b+c+d$ - общее число жителей. Тогда, $b-a=0.2N$ и, значит , $b\geq 0.2N.$ Тогда общее количество рыцарей $a+b\geq 0.2N$, а лжецов $c+d\leq 0.8N$, откуда и получаем требуемое.

Решение 2. Высоконаучное. Обозначив через x, долю жителей в какой-то из клеток таблицы, запишем:

	Проголосовали за партию рыцарей	Проголосовали за партию лжецов
Количество рыцарей	x	0.5-(0.3-x)=0.2+x
Количество лжецов	0.3-x	0.7-(0.2+x)=0.5-x

Теперь осталось доказать, что значения функции $\frac{0.2+2x}{0.8-2x}$ заключены в диапазоне [0.25;4] при допустимых значениях переменной x, то есть при x□[0;0.3]. Нарисуем соответствующую гиперболу и убедимся, что это правда.

Задача 5. Да, могло. Пусть в турнире участвовало 13 команд. Назовём одну из команд "особенной". Пусть "особенная" команда выиграла 5 матчей, а 7 матчей проиграла, и все остальные матчи закончились вничью. Тогда в этом году у "особенной" команды $3\cdot 5=15$ очков, а у других команд, которые выиграли у "особенной", по $3+11\cdot 1=14$ очков. Очевидно, команды, проигравшие "особенной", набирают меньше, чем 14 очков. Таким образом, "особенная" команда занимает в этом году первое место. При использовании в этом году прошлогодней системы подсчёта очков "особенная" команда оказалась бы последней, так как набрала бы $5\cdot 2=10$ *очков*, а у других команд, которые проиграли "особенной", по $11\cdot 1=11$ *очков*.

P.S. Всё во власти Василия Павловича!

Задача 6.

Решение 1. Функциональное. В силу симметричности уравнения относительно a, b *и* c, н.у.о. будем считать, что $a<b<c$.

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0\\(x-a)(x-b)(x-c)\neq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (1)\end{cases}$$

Пусть $(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=f(x)$. Заметим, что:

$f(a)=(a-b)(a-c)\Rightarrow f(a)>0 \qquad (a<b, a<c)$

$f(b)=(b-a)(b-c)\Rightarrow f(b)<0 \qquad (b>a, b<c)$

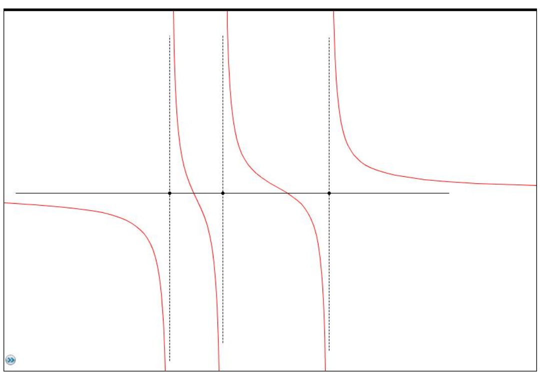
$f(c)=(c-a)(c-b)\Rightarrow f(c)>0 \qquad (a<b, a<c)$

Функция $f(x)$ непрерывна; $f(a)>0 \text{ и } f(b)<0$, значит, у функции существует корень x_1 на интервале $(a;b)$. Аналогично существует корень x_2 на интервале $(b;c)$. Функция $f(x)$ – квадратичная, следовательно корней у нее не больше двух, причем оба этих корня удовлетворяют условию (1), следовательно у исходного уравнения ровно 2 корня.

Решение 2. Тривиальное. Раскроем скобки в числителе, напишем дискриминант полученного квадратного уравнения, заметим, что его можно представить в виде $2(a-b)^2+2(a-c)^2+2(b-c)^2>0$, поскольку a,b,c различны. Осталось проверить, что a,b,c не являются корнями числителя, то есть оба корня числителя удовлетворяют ОДЗ. Кстати, эту проверку удобнее всего делать, когда дроби к общему знаменателю уже приведены, а скобки в числителе еще не раскрыты.

Решение 3. То же решение 2, но пересказанное на высоконаучный лад. Приведем к общему знаменателю, перепишем числитель через элементарные симметрические полиномы: $x^2-2\sigma_1 x+\sigma_2=0$. $\frac{D}{4}=\sigma_1{}^2-4\sigma_2\geq 0$ – это известное неравенство для симметрических полиномов от трех переменных, равенство в нем достигается только при совпадающих a,b,c. Осталось проверить, что a,b,c не являются корнями числителя, то есть оба корня числителя удовлетворяют ОДЗ.

Решение 4. Графическое. Все три слагаемых – функции, убывающие на каждом промежутке своей области определения. Значит, их сумма тоже убывает на каждом промежутке своей области определения. Пределы в каждой точке разрыва равны ±∞, поскольку в каждой точке разрыва одно из трех слагаемых имеет такой предел, а два других конечны. Пределы в ±∞ равны ±0 соответственно. Итак, вид графика понятен (см. рис.).



По графику устанавливаем, что корней 2.

<u>Задача 7</u>. ***Решение 1. Упорядоченное.*** Нетрудно заметить, что все возможные решения будут положительны. Из первого уравнения имеем: $2y = x^2 + 1 \geq 2x$, то есть $y \geq x$. Аналогично $y \geq x$и $y \geq x$. Отсюда получаем, что необходимое условие $x = y = z$. Дальше очевидно. Ответ: $x = y = z = 1$.

Решение 2. Симметричное. Домножим все равенства на 2 и сложим:
$x^2+1+y^2+1+z^2+1=2y+2z+2x \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$, откуда следует, что $x=y=z=1$. Осталось заметить, что этот набор подходит.

Ответ: $x=y=z=1$

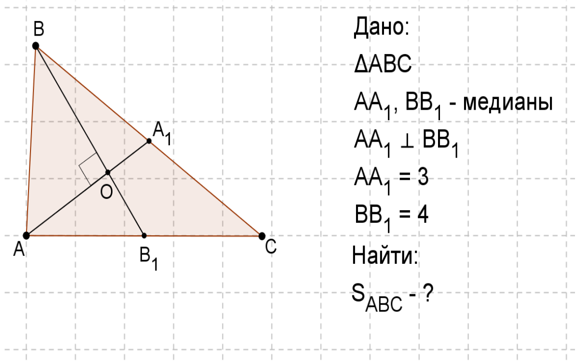
<u>Задача 8</u>. Раз числа x^{177} и x^{221} рациональны, то и число $x^{221}/x^{177}=x^{44}$ рационально, а значит рациональны числа $x^{176}=(x^{44})^4$ и само число $x= x^{177}/x^{176}$.

Вопрос. А если известно, что рациональны числа x^{77} и x^{121}, то можно ли утверждать что число x рационально?

<u>Задача 9.</u>

Решение: $S_{ABC} = 2\,S_{ABB_1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BB_1 = AO\cdot BB_1 = \frac{2}{3}AA_1\cdot BB_1 = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot 4 = 8$.

Первый переход верен, т. к. высота треугольников общая, B_1 – середина AC, четвертый переход – т. к. O делит медианы в отношении 2:1.



.