ЛОГИКА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ,

Одна из приоритетных ценностей образования – интеллектуальное развитие ребенка, важной составляющей которого является развитие словесно-логического мышления. Посему курс логики почти напрашивается в среднем образовании. Да так оно и было – одно время такой курс преподавался в советской школе, и мне довелось целый год выслушивать его. Было довольно скучно – вникать в понятия, суждения, умозаключения, оторванные от жизни, и, что ещё более странно, не связанные с математикой (разве что приводились математические примеры тому или иному положению из логики). Про обратные теоремы, необходимые и достаточные условия, метод доказательства от противного я узнал на уроках математики, а про всякого рода отношения между высказываниями (следование, равносильность) и математическую логику – вообще не в школе.

Когда курс логики убрали из нашего школьного образования, вся сложность проблемы перешла к математике, чему было несколько оснований.

Вот какова была позиция самих математиков.

В.Феллер во введении к своему известному учебнику по теории вероятностей отмечал: «В каждой дисциплине мы должны заботиться о различении трёх сторон теории: а) формального логического содержания; б) интуитивных представлений; в) приложений. Характер дисциплины в целом и её прелесть нельзя по-настоящему оценить, не рассматривая эти три аспекта в их взаимосвязи».

О важности развития логического мышления школьников писали такие известные математики, как А.Колмогоров, Я.Дубнов, А.Хинчин, Б.Гнеденко, Л.Калужнин . Особая роль в этом отводилась геометрии, в которой его ценность выдающимися математиками – авторами школьных учебников считалась неотъемлемой (А.Александров) и даже основной (А.Погорелов).

Развитие логического мышления всегда почиталось как одна из основных ценностей школьного математического образования и в педагогике математики, что нашло отражение как в работах педагогического характера , так и в нормативных документах .

В связи с возникшей тенденцией – знакомить с логикой в курсе математики – в методической и учебной литературе появились многочисленные пособия по развитию логического мышления школьников. Эта тенденция отразилась и в учебниках математики , и в пособиях для поступающих в вузы . Более того, сегодня в школу возвращается сам курс логики – как элективный . На путях реализации этой тенденции необходимо сделать некоторые оговорки.

Во-первых, в психологии нет термина «логическое мышление», а есть термин «словесно-логическое мышление», и он понимается гораздо шире, чем в математическом образовании. Поэтому я предпочел бы говорить о ***логической культуре*** школьника (своеобразной интеллектуальной гигиене) и о возможном вкладе математики в её формирование. К тому же известно, что словесно-логическое мышление – отнюдь не единственный вид мышления и в определённом смысле «не самый главный». Открытия совершаются не за его счёт.

Во-вторых, мнение об исключительной роли математики в становлении логической культуры ребёнка вряд ли бесспорно. Так, в недавнем интервью главный редактор журнала «Квант» академик Ю.Осипьян посчитал самой логичной из наук физику.

В целом проблема носит слишком общий характер. Попытаюсь ее как-то уточнить и сузить.

Логику можно воспринимать в трёх аспектах.

• Есть *практическая логика*, используемая в повседневной жизни. В ней существен так называемый здравый смысл, личный опыт, контекст.

Напомню хрестоматийный пример, демонстрирующий значение контекста. Приказ «Казнить нельзя помиловать», написанный без запятой, привёл в недоумение его исполнителя. Но стоило тому чуть подумать, и он понял бы, что запятая после первого слова неуместна, ибо не добавляет новой информации (в приказах не объясняют причин). А запятая после второго слова как раз существенна, поскольку указывает, что делать дальше.

Даже эмоциональная окраска и интонация имеют значение – они могут изменить смысл сказанного на противоположный. Как, к примеру, воспринимать ответ «Да» на вопрос «Не хочешь ли ты поесть?»

• Есть *формальная логика*, в которой изучают только формы мышления, полностью отвлекаясь от содержания. Именно здесь можно рассуждать о «чёрном снеге», действиях «глокой куздры» и т.п.

• Есть *математическая логика* –раздел математики. В ней достаточно силён момент формализации, но нет места бессодержательным предложениям.

Самому себе я задаю вопрос: что из формальной и математической логики следует изучать в школе, чтобы в результате практическая логика не подводила?

А то, что она подводит хорошо известно. Логических ляпсусов даже в обычной речи предостаточно. Вот несколько реальных тому примеров, иногда не вполне серьёзных .

Пример 1. Недавно в одном из современных российских сериалов услышал следующий обмен репликами между двумя дамами (привожу почти дословно).

Первая дама: «Если мне понравится мужчина, так он обязательно негодяй!»

Вторая дама: «Уж не хочешь ли ты сказать, что если мужчина тебе не нравится, то он – хороший человек?»

Первая дама: «Вот именно!»

Пример 2. Однажды я прочитал такое: «Согласно последним научным данным, чем выше уровень интеллекта, тем меньше человек смотрит ТВ. По-моему, всё наоборот: чем больше смотришь ТВ, тем ниже уровень твоего интеллекта».

Пример 3. Если покопаться в древних источниках, то вот что можно прочитать у Лао Цзы: «Истинные слова неприятны; приятные слова не истинны» .

Пример 4. Много изречений такого рода содержится в сборниках законов Мерфи . Приведу Две фразы.

«Если у вас есть время, то не будет денег. Если у вас есть деньги, то не будет времени».

«Негативные ожидания порождают негативные результаты. Позитивные ожидания порождают негативные результаты».

Мы видим, как перемешиваются прямые утверждения и противоположные, обратные и им противоположные и пр. В литературном жанре это, видимо, приемлемо, но в житейской практике иногда хочется большей точности.

Пример 5. А вот мои аналогичные вариации.

1) Всем детям полезны витамины. Всем взрослым полезны витамины. Второе предложение равносильно следующему: если кому-то не полезны витамины, то это не взрослый, т.е. ребёнок. А всем детям согласно первому предложению полезны витамины. И получается, что если кому-то полезны витамины, то они ему же и не полезны. Что здесь не так?

2) Пример из математики. В выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360^o. В невыпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360^o. Отсюда, следуя той же схеме рассуждений, получим ляпсус.

3) Совсем шуточный пример. Известному изречению «Кто не рискует, тот не пьёт шампанское» равносильно такое – «Кто пьёт шампанское, тот рискует».

В своё время расхождение между провозглашаемой важностью логической культуры и тем, что мы видим «на выходе», было замечено А.Столяром . Он высказал мнение о том, что традиционных средств, используемых в школьной математике, недостаточно для обеспечения должной логической культуры учащихся и необходимо внедрение в изучаемый курс элементов математической логики. Что – то ведь надо делать с этой самой культурой! И кому, как не нам?

Любой учитель математики знает о так называемых логических ошибках своих подопечных и старается научить их правильно употреблять слово «следовательно», нормально строить отрицание (особенно если в предположении есть кванторы), доказывать от противного. Необходимо толком объяснить детям, какие бывают определения, как устроены теоремы, как из теоремы получить обратную и противоположную, какая разница между свойствами и признаками, какое свойство фигуры мы называем характерным , что значит «равносильно», каково отличие необходимости от достаточности.

Не раз я предлагал ученикам разобраться в такой простенькой ситуации. Есть ли смысловая разница в предложениях: «Маша гуляет тогда, когда ей разрешила мама» и «Маша гуляет только тогда, когда ей разрешила мама»? А если разница есть, то в чём она? Если мы видим гуляющую Машу, то какое из этих предложений соответствует её гулянию? Мнения разделялись.

Чтобы ученики стали во всё этом разбираться, приходится им рассказать, как образуются сложные высказывания, с помощью каких союзов.

Следует аккуратнее использовать, не путать союзы «и», «или» .

Вспомним дискуссию героев П. Бомарше о том, что написано в завещании под кляксой: «и», а может быть, «или»?

«Бартоло. Я утверждаю, что это соединительный союз «и», связывающий соотносительные члены предложения: я уплачу девице и женюсь на ней.

Фигаро. А я утверждаю, что это разделительный союз «или», упомянутые члены разъединяющий: я уплачу девице или женюсь на ней».

Союз «и» в обыденной речи понимается двояко. Надпись «Места для детей и инвалидов» не означает, что на данное место может претендовать только больной ребёнок. А фраза «К доске пойдут Вася и Федя» означает, что у доски окажутся два ученика.

То же касается союза «или». Фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду в кино или на стадионе» подразумевает только одну из двух указанных возможностей, в то время как фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду смотреть кино по телевизору или лежать на диване» не исключает совмещения обоих занятий.

Важно пояснить, что есть два вида дизъюнкции: соединительная и разделительная. В логике она первого вида, а в жизни чаще второго, поэтому в текстах появился новый союз «и/или», соответствующий в жизни соединительной дизъюнкции. А для разделительной дизъюнкции чаще употребляют союз «либо».

Долго приходится обучать детей верной формулировке отрицания, особенно если отрицается сложное высказывание да еще «отягощённое» кванторами. Вот примеры: непериодическая функция; последовательность, не имеющая предела (это требуется в известном доказательстве от противного равносильности двух определений предела); фигура, не являющаяся выпуклой; уравнение, не имеющее единственного натурального корня. Ещё пример — как выглядит отрицание такого простенького утверждения: «Среди натуральных чисел есть простые и составные»? Отрицание «сидит» даже в определении иррационального числа как такого числа, которое не является рациональным,— корректно ли такое определение?

Когда мы с чем-то не согласны, то считаем сказанное предложение неверным. Тогда какое предложение мы считаем верным? Его отрицание. И как его сформулировать?

Главный вопрос – где располагать частицу *не* и как от неё при необходимости избавиться?

Возьмём «житейские» примеры. Как выглядят отрицания в следующих ситуациях?

1) Крокодилы живут в Африке;

2) Крокодилы не живут только в Гренландии.

3) Эта кошка пьет только воду.

4) Мои оценки по алгебре и геометрии – четвёрки и пятёрки.

5) Известен анекдотичный случай из американской истории. Некий конгрессмен заявил военному министру, что тот «может украсть всё, что угодно, исключая раскалённую печку». А когда от конгрессмена потребовали опровержения, оно не задержалось: военный министр «может украсть всё, что угодно, включая раскалённую печку».

6) А вот любопытный диалог в суде (из Р.Смаллиана).

« *Обвинитель*: «Если подсудимый виновен, то у него был сообщник».

Защитник: «Это неверно!»

Ничего хуже защитник сказать не мог. Почему?»

Перейду к примерам из математики.

Пусть предложение имеет форму конъюнкции, дизъюнкции или импликации. Вы увидите на лицах учеников отсвет недоумения, предложив им сформулировать верное отрицание, например, таких предложений.

1) Число 6 делится на 3 и число 5 делится на 3.

2) Число 5 делится на 3 или число 7 делится на 3.

3) Число 5 делится на 3 либо число 7 делится на 3. (Здесь - разделительная дизъюнкция)

4) Если число 6 делится на 3, то число 5 делится на 3.

5) Данная фигура – квадрат или прямоугольник.

6) Данная фигура – прямоугольник и квадрат.

7) Данная фигура – квадрат либо прямоугольник. (Здесь - разделительная дизъюнкция)

8) Данная фигура – не квадрат и даже не прямоугольник.

9) Данная фигура – не только квадрат или прямоугольник.

10) Данная фигура – только не квадрат или прямоугольник.

11) Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам.

12) Медианы треугольника, пересекаясь, делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины.

13) Если функция чётная или нечётная, то ее график симметричен относительно начала координат и относительно оси ординат.

14) Если в четырёхугольнике стороны равны, а диагонали взаимно перпендикулярны, то он является квадратом.

15) Два равновеликих треугольника равны, если они имеют пару соответственно равных сторон.

Уже простейшие эти примеры показывают наличие трудностей при освоении отрицания.

Но учитель отрицает постоянно – неверные ответы или решения учеников. Отрицая их, требуется демонстрировать ученикам свои, построенные отрицания и объяснять, почему они построены именно так.

В некоторых случаях приходится использовать доказательство от противного, для этого надо понимать, в чём оно состоит и уметь строить контрапозицию к данной теореме. Без отрицания тут не обойтись.

Возникает соблазн – известным образом формализовать построение отрицания: развесить кванторы и затем обработать их соответствующим образом. Но нужна ли такая формализация, может быть, полезнее добиваться от учеников верного содержательного построения отрицания? А если да — учить манипуляциям с кванторами, то когда это начинать?

Другого типа трудности возникают при растолковании теорем, когда нам требуется сформулировать теорему , обратную заданной. Несложно это получается разве что в тех случаях, когда в условии и заключении теоремы всего одно утверждение, хотя и тут не всё гладко – об этом дальше.

Прямое и обратное утверждение. путают не только ученики, но и мои коллеги. Например, недавно в газете «Математика» мне попалась следующая «находка». Её автор приводит утверждение «Если сумма коэффициентов квадратного уравнения равна нулю, то один из его корней равен 1». А доказывает его так: подставим в квадратное уравнение вместо переменной число 1 и увидим, что сумма его коэффициентов равна нулю. Вот так!

Ситуация становится запутанной, когда условие или заключение теоремы содержит более одного утверждения. Бывает, что её непросто даже сформулировать. В частности, возникает вопрос, как поступать с разъяснительной частью прямой теоремы при переходе к обратной: оставлять такой же или как-то видоизменять? Как, например, выглядит предложение, обратное теореме «Два перпендикуляра, проведённые к одной плоскости, параллельны»? Или теореме «Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам»? А о теореме :«Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» я прочитал как – то , что она не имеет обратной.

Возьмём теорему «Если прямая касается окружности, то радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен этой прямой». Аккуратная формулировка обратного предложения выглядит так: «Если радиус, проведённый в точку касания прямой с окружностью, перпендикулярен к этой прямой, то прямая касается окружности», но такая формулировка кажется неудачной. На практике создается другое предложение, близкое по смыслу данному , которое и называют обратным.

Надо подумать, что для нас является дидактической целью. Получить верное предложение, связанное по смыслу с данным, но при этом достаточно вольно обращаться с разъяснительной частью и простыми высказываниями, входящими в формулировку теоремы, а потом назвать полученное верное предложение обратной теоремой? Или же выстроить согласно неким предписаниям структуру обратного предложения и установить, будет ли оно истинным, после чего, возможно, называть его обратной теоремой?

Добавлю к месту ещё несколько замечаний.

- Не для каждого предложения есть обратное. Примеры: утверждение «$1 > 0$» (дети тут же скажут, что обратным ему будет такое: «$0 < 1$»); теоремы существования (или не существования); теоремы единственности.
- Фраза «обратная теорема неверна» звучит подозрительно. Теорема – это *доказанное* предложение, а доказанное не может быть неверным. Поэтому лучше говорить «обратное предложение» вместо «обратная теорема» до тех пор, пока не установлена его истинность.
- Никакая теорема не является прямой или обратной *изначально*. Даже теорема Пифагора – обратная к теореме, являющейся следствием теоремы косинуса. Лучше говорить о *взаимно обратных* теоремах, из которых любая может быть названа прямой. Потому (ясный по сути) призыв иных методистов «научить школьников различать прямую и обратную теорему» стоит переформулировать.

Кстати сказать, исторически первой была найдена как раз не теорема Пифагора, сформулированная на «языке площадей», а теорема, позволяющая строить на земле прямые углы (вспомним о египетском треугольнике).

Для создания обратной теоремы мы советуем ученикам сформулировать исходную теорему, используя союз « Если… то». Значит, надо пояснить, что стоит за этим союзом стоит.

Наконец , необходимо рассказывать о следовании и равносильности. Как понимать следование, если исходное уравнение не имеет решений, что выясняется только в самом конце выкладки?

Для осознания структуры теоремы необходимо выделять в её формулировке разъяснительную часть. А в ней всегда присутствуют кванторы.

Приведу примеры. Сначала «житейские» (с их помощью я фиксирую внимание учеников на этом обстоятельстве).

Пример 1. Пусть сказано: «Маша любит кашу». Спрашиваю учеников: это верно или нет? Они пытаются отвечать, но отвечать на такой вопрос бессмысленно, ибо перед нами – предложение с двумя переменными: «Маша» и «каша», а не высказывание.

Сначала надо превратить его высказывание, то есть в предложение без переменных, «навесив» кванторы на «Машу» и на «кашу». Например, можно сформулировать такое предложение: «Любая Маша любит любую кашу». Видимо, это неверно. Другой вариант: «Есть такая Маша и такая каша, что эта Маша любит эту кашу», что, должно быть, верно.

Любопытно, что учителя-гуманитарии заявили мне: ответ на данный вопрос зависит не от каких-то там логических штучек, а от того, кто это говорит.

В математике существует договорённость: если квантора нет, то подразумевается квантор всеобщности. Если эту договорённость перенести на «житейские» примеры, то ответ на поставленный вопрос – «нет». Но надо ли переносить?

Пример 2. Известное выражение «Цель оправдывает средства», как правило, имеет негативный оттенок. Однако если на переменные «цель» и «средства» «навесить» кванторы, то в зависимости от их расстановки возможны четыре варианта толкования. И каждый имеет смысл. А выбор верного варианта – уже вне логики.

Сложилось так, что в формулировках математических предложений кванторы часто «не звучат» в явном виде. Вместо квантора существования употребляются такие слова, как *найдётся* (в круге найдётся хорда, которая делит его площадь пополам) или *есть* (в остроугольном треугольнике есть такая точка, из которой все его стороны видны под равными углами). Ещё хуже обстоят дела с квантором всеобщности, который, как уже отмечалось, опускают. Например, его нет в теореме о площади треугольника (площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; а сколько таких оснований?) или в формуле квадрата суммы (о каких числах в ней говорится – о любых?).

«Навешивание» кванторов порой необходимо для понимания условия задачи. Вот задача на построение: «Вписать квадрат в треугольник». Как это понимать? Кванторы опущены, значит, на каждую переменную полагается квантор всеобщности. Получается чепуха, а не задача! Любой квадрат не может быть вписан в любой треугольник. Тогда о чём идет речь?

Иногда этих двух кванторов не хватает. Появилось обозначение $\exists!$ в ситуации с существованием одного решения.

Наконец, логическая культура проявляется для недвусмысленной записи выкладок и ответа

Я встречал, к примеру, запись $\frac{2x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow \varnothing$, хотя непонятно, как уравнение и множество могут быть равносильными. Можно увидеть такую запись:

$$AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \text{ определено} \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0 \\ B \text{ определено.} \end{cases}$$

В одной строке использованы разные языки: алгебраический, логический и естественный. Мне это не нравится, но так пишут!

.Про ответ в уравнении $x^2 = 1$ Г. Дорофеев полагает, что его можно записать так: «$x = 1$ и $x = -1$», но можно и так: «$x = 1$ или $x = -1$». Тем самым смазано различие в этих союзах в математическом тексте, что сомнительно.

По ходу дела маленькое замечание про запись ответа. Ответ в уравнении, я полагаю, естественно записывать в «том же стиле», в каком было дано оно само. Например, ответ в уравнении $2x = 4$ я предпочту записать так: $x = 2$, нежели в виде $\{2\}$ или $x \in \{2\}$. Запись ответа в виде множества, разумеется, возможна. Однако она менее естественна и чревата сложностями, особенно когда речь идёт об ответе тригонометрического уравнения.

Школьная математика – школа точного мышления, её постижение начинается в 6–7 лет и длится непрерывно более десяти лет. Для точности мышления и понимания необходима *точность языка*. Точность естественного языка не всегда достаточна, слова и фразы не всегда толкуются однозначно, огромную роль играет контекст.

Суть проблемы в том, что математический текст излагается детям на естественном языке, и требуемая точность понимания математического текста «зависает» из-за неоднозначности толкования фраз естественного языка. Поэтому необходимы чёткие договорённости. Где же их взять? Разве что позаимствовать у формальной или математической логики.

Курс информатики только заостряет проблему. Как без использования основ математической логики объяснить ученикам компьютерную идеологию?

К этому можно добавить такое соображение. Один из важных этапов познания – *понимание*. Понимание предложения, в том числе и математического, предполагает оценку истинности не только самого предложения, но и его отрицания, его обращения (обратного предложения) и контрапозиции (предложения, противоположного обратному). Без осознания структуры предложения невозможно грамотно построить ни его отрицание, ни обращение, ни контрапозицию. Их формулировки получить не всегда просто: необходимо уметь отличать предложение без переменных (высказывание) от предложения с переменными (предиката), выделять переменные и устанавливать на них ограничения, «развешивать» (где необходимо) кванторы и вычленять логические операции. Ещё запутаннее становится ситуация, когда мы используем такие слова, как *некоторые, только*, *не только* и т.п.

Например, ученики поначалу недоумевают, услышав, что логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел только тогда, когда произведение этих чисел положительно.

Итак, для формирования логической культуры почти необходима некоторая доля формализации. Естественно считать, что таковая обеспечивается начальными сведениями из формальной и математической логики.

Прежде чем говорить о толковании математических предложений в форме высказываний, напомню, что предложение с переменной превращается в предложение без переменной в результате «навешивания» на последнюю **квантора** (всеобщности или существования), после чего уже можно говорить о его истинности или ложности.

Техника работы с кванторами позволяет упростить формулирование отрицания: можно уже не напрягать умственные способности, а работать чуть ли не механически. Вспомним определение последовательности, не имеющей предела, или функции, не являющейся периодической – после формальной работы с кванторами остаётся только воспроизвести увиденное..

В работе с кванторами требуется соблюдать осторожность. Квантор всеобщности и квантор существования в предложении с двумя переменными нельзя произвольно менять местами (ученики довольно часто допускают такую ошибку).

Например, утверждать, что существует квадрат, который можно вписать в любой треугольник, – глупость. А сказать, что какой бы ни был треугольник, существует квадрат, который в него можно вписать, – значит фактически сформулировать задачу на построение.

Приведу ещё один пример. Высказывание, записанное символически: $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$, не равносильно высказыванию, представленному в символической форме $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$.

Замечу, что термин «любой» оказывается на деле почему-то менее предпочтителен, чем термин «каждый» или «всякий». Видимо, все дело в языке и психологии. Термин «любой» не всегда толкуется в обыденной речи, как в математике, и это мешает ясному пониманию высказываний, в которых используется квантор всеобщности. В работе с квантором $\forall\, x$ чёткое понимание достигается быстрее, если его читать как «для каждого x».

Перейдём к логическим союзам. В математическом тексте союз «и» между двумя предложениями трактуется как их **конъюнкция**, а посему предполагает совместное рассмотрение двух условий, например: если для параллелограмма существует описанная и вписанная окружность, то он является квадратом.

В свою очередь союз «или» между двумя предложениями трактуется как их **дизъюнкция**:

– *нестрогая*, если допускается одновременное выполнение двух условий. Употребляем «или», например, в предложении « около треугольника или правильного многоугольника можно описать окружность»

– *строгая*, если выполняется только одно из условий. Говорим «либо», например, в предложении « прямые, не имеющие общей точки, параллельны либо скрещиваются».

Замечу, что в математическом языке нет надобности в повторяющихся союзах естественного языка: *и – и* («И Вася, и Федя – оба подойдите ко мне!»), а также *либо – либо* (кто-то один: либо Вася, либо Федя). Когда такие союзы встречаются в математическом тексте, приходится уточнять их значение.

Толкование союза «если» в живом языке и в математике опять-таки различно. В обычном языке за ним может скрываться как достаточность («Родители отпустят меня на футбольный матч, если я получу за контрольную «пятёрку»), так и равносильность (Футбольная команда выиграла матч, если забила больше мячей в ворота соперника), а в математике – только достаточность. Но есть языковая проблема.

Равносильности в математике соответствует союз «если и только если» (он не прижился в русском языке, обычно говорят «тогда и только тогда, когда»), который частенько опускают, предпочитая оставлять «если». И что получается? Типичный пример – в определениях : «прямая параллельна плоскости, если она не имеет с этой плоскостью общих точек». Приходится объяснять ученикам, что за этим «если» скрываются два утверждения – прямое и обратное. В других ситуациях , в теоремах, «если» означает только достаточность. Например, «Если треугольник прямоугольный, то квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других его сторон.»

Итак, благодаря формальной логике можно добиться точности в употреблении союзов., Но увы, внедрение формальной логики может внести (и вносит) некую сумятицу в молодых умах.

Я поведу сейчас речь о союзе *если – то*, о следовании предложений, об импликации, будь она неладна. Начну с последней.

Напомню, что **импликация** двух суждений имеет вид «если p, то q». Она ложна только в одном случае: когда p истинно, а q ложно, и истинна в остальных случаях.

Ученикам всегда приходится специально пояснять истинность импликации при ложной посылке (условии, антецеденте). История с импликацией давняя. Еще Филон Мегарский (III в. до н.э.) «определил условное предложение как такое предложение, которое ложно тогда и только тогда, когда его антецедент (условие) истинен, а консеквент (заключение) ложен, и которое истинно в трёх остальных случаях. Это определение положило начало спорам о смысле импликации… Должно быть, споры по этому вопросу были очень оживлёнными, коль скоро Каллимах, библиотекарь в Александрии, во втором веке до н.э. увековечил их в эпиграмме: “Уже вороны на крыше каркают, какая же импликация правильная”» .

Со времён древних греков не счесть работ по логике, в которых так или иначе не обсуждался бы этот феномен. Но и по сей день истинность импликации при ложной посылке подвергается сомнению. Даже предлагается в этом случае считать ее неопределённой или вовсе бессмысленной .

В парадоксальной форме это толкование импликации подается в виде известной фразы: «Если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы». Такое «странное» соглашение об импликации требуется как-то пояснить ученикам. Раньше рассуждали, например, так. Суждение «если A, то B» означает, что «если нет A, то нет и B». Но если A вообще нет, то B тем более нет .

Ученикам я иллюстрирую истинность импликации при ложной посылке на примерах. Говорю фразу: «Если у меня есть свободное время, то я гуляю». А затем спрашиваю: «В каком случае я вас обманул?» Ответ ясен: когда свободное время было, а гулять я не пошел. Во всех прочих случаях я не обманывал, т.е. говорил правду. Любопытен и такой пример. Скажем: «Если сегодня среда, то завтра четверг» и зададимся вопросом – в какой день недели это высказывание верно? Ясно, что в любой. Не только в среду, а, к примеру, во вторник, т.е. тогда, когда условие ложно.

Импликация – это «полбеды». «Беда» поджидает нас дальше, когда мы начинаем разговор об отношении следования и произносим «из A следует B» или «ещё хуже» – «если A, то B», приплетая сюда терминологию импликации.

В обычной речи следование подразумевает наличие причинно-следственной связи (из того, что идёт дождь, следует, что улицы мокрые), логической связи (из того, что Сократ – человек, следует, что он смертен, ибо все люди смертны), содержательной связи (следствия из формул). Тем самым, на практике из ложного условия не может следовать верное предложение.

Но если отношение следования имеет форму импликации, что происходит при использовании союза «если – то», то ситуация запутывается. А когда ещё говорят нечто эпатирующее, вроде «изо лжи следует все, что угодно», в головах учеников наступает окончательное помутнение.

В формальной логике ситуация такова. На множестве высказываний **отношение следования** («из A следует B», «A влечёт B») означает, что импликация «если A, то B» верна при условии истинности A. При ложности A сказать «из A следует B» просто невозможно – не тот случай. Иначе говоря, изо лжи ничего не следует. Можно сказать: «Если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы», но я бы не сказал: «Из того, что $2 \times 2 = 5$ *следует*, что существуют ведьмы». Я могу сказать: «Если $0 = 1$, то $1 = 2$», но язык не повернётся сказать: «Из того, что $0 = 1$ *следует*, что $1 = 2$». (У некоторых моих весьма компетентных знакомых – повернётся.)

Мне хочется упомянуть один пример В.Арнольда . В нём приводится следующее определение импликации из французского учебника для математиков: «Пусть A и B –

два любых утверждения. Если они оба верны, то говорят, что из A вытекает B». Далее В.Арнольд пишет: «После таких «импликаций» учить студентов каким бы то ни было естественным наукам бессмысленно: они думают, что из того, что дважды два четыре, «вытекает», что Земля вращается вокруг Солнца».

Чтобы различать импликацию и следование, в формальной логике для импликации часто употребляется не союз «если – то», не глагол «следует», а глагол «имплицирует». Скажем так: «Равенство $2 \times 2 = 5$ *имплицирует* существование ведьм». Будь такой оборот принят повсеместно, вряд ли кто-то стал бы удивляться, и вороны в Древней Греции не каркали бы. Но ни в обыденной речи, ни в школьной математике термина «имплицирует» нет, да и вряд ли он привьется – по иррациональным соображениям.

И с обозначениями можно напутать. Знаки импликации (чаще всего $\to$) и следования (чаще всего $\Rightarrow$) не равноправны, а потому их употребление требует точности. Здесь имеется несколько заморочек. Одна из них такова: знак $\Rightarrow$ у некоторых авторов означает импликацию, а для следования используется знак $\supset$ или $\models$. Хорошо бы чётко определить, каково употребление в школьной математике не только слов «если…, то…», «следует», но и знаков $\to$, $\Rightarrow$. Однако этого, увы, нет.

Приведу примеры того, как путаница в терминологии и обозначениях сказывается на решении уравнений, неравенств, систем (дальше я для краткости буду говорить только об уравнениях), если трактовать их как предикаты.

Такая точка зрения очень четко выражена А. Земляковым:«В действительности алгебраические задачи с переменными относятся к математической логике, и в ней они называются предложениями с переменными. Например, уравнение можно определить как предложение, имеющее вид равенства между двумя выражениями (содержащими переменные)». И далее дается такое определение уравнения: «…уравнением с переменной x называется предложение, имеющее вид равенства между двумя выражениями, содержащими эту переменную». (В это определение не вписывается, например, равенство $x^2 = 1$, но сейчас речь не об этом.)

При решении уравнений авторы многих пособий при переходе от имеющегося уравнения к следующему как выводному (не равносильному) говорят, что второе уравнение есть следствие первого, и ставят знак $\Rightarrow$.

По существу происходит отказ от импликации предикатов, речь идет об их следовании, по сути – об отношении включения между двумя множествами. Однако при решении уравнения не исключен случай отсутствия корней. Я вижу здесь некое противоречие: из ложной посылки не бывает следствий, однако пустое множество включено в любое множество. Так что, в этом случае возвращаться к толкованию процесса решения уравнения как к импликации предикатов?

Есть два выхода из положения. Первый – формальный: трактовать уравнение как предикат и ставить между уравнениями знак импликации ($\rightarrow$). Второй вариант – не рассматривать уравнение как предикат, считать, что оно предполагает некий императив. (Само по себе равенство $x = x + 1$ можно полагать бессодержательным. Мало ли что можно написать, если не сказано, что делать дальше. Поэтому, рассматривая уравнение, говорят: «решить», «найти x».) При этом надо оговорить, что термин «следует» («следствие») при решении уравнений означает не то же самое, что в логике из-за возможного случая отсутствия решения исходного уравнения[3]. Мне больше нравится второй вариант.

(Этот разговор с соответствующими поправками переносится на равносильность и использование знака $\Leftrightarrow$.)

Второй момент, когда приходится обсуждать с учениками расхождение формального и содержательного, возникает при встрече с задачей, условие которой противоречиво. Тут я подробности опускаю, ибо об этом говорил выше.

Внедрение формальной логики в математическое образование полезно, но следует соблюдать разумные границы. Надо хорошо понимать, что введение её чревато некими методическими проблемами, ибо она не вполне согласуется как с математическим, так и с естественным языком. Если я говорю: «2 + 2 равно 4 или 5», то это верно с точки зрения логики, но неверно в житейском понимании.

Демонстрируя преимущества использования формальной логики, не стоит забывать о том, что в ней есть свои проблемы. Существуют предложения, которые противоречат сами себе, например, знаменитое : «Я лгу», а также «Никогда не слушайте чужих советов!» и т.п.

С помощью двух предложений можно доказать все, что угодно. Вот пример из Р.Смаллиана.

На листе бумаги записываем предложения:

1. Астрология – точная наука.

2. Оба предложения на этом листе – ложные.

Поразмышляв, «получаем», что «астрология – точная наука».

Известны логические парадоксы из древности (парадокс лжеца) и последних времен (парадокс Рассела, парадокс Ришара, парадокс Берри, парадокс Греллинга). Их обсуждению посвящена обширная литература.

Возможности формальной логики в установлении истинности не беспредельны, даже если все суждения достаточно чётки. Мы знаем, конечно, что она может выручить в сконструированных специальным образом задачах, когда требуется установить, кто лжёт, а кто говорит правду. Но из двух простеньких суждений: «Вася говорит, что Федя лжёт» и «Федя говорит, что Вася лжёт» средствами формальной логики не установить, кто из ребят говорит правду (пример Ж.Буридана).

Вообще, формальный ригоризм в школьном курсе вряд ли уместен. Нет вреда в том, что иногда для удобства приходится переходить на некоторое арго.

Более того, иногда логика бывает даже не в ладах с математикой. Так, в логике различают доказательство *приведением к абсурду* и доказательство *от противного*. Математики называют доказательством от противного рассуждение, основанное на контрапозиции, и не обращают на существующую разницу никакого внимания.

Полагаю, что не стоит здесь вдаваться в различие между двумя этими толкованиями, хотя в дидактической литературе предлагают это сделать. Практичнее остановиться на ясной позиции, именно: для доказательства теоремы $A \to B$ предполагают истинным высказывание $\overline{B}$ и пытаются вывести отсюда справедливость высказывания $\overline{B} \to \overline{A}$; если это удаётся (т.е. если доказана теорема $\overline{B} \to \overline{A}$, противоположная обратной), то исходная теорема $A \to B$ также считается доказанной.

Различие между логикой и математикой в этой нестыковке я понимаю так. В школьном курсе математики предложения в основном доказывают, почти никогда не опровергают, очень редко исследуют (раньше исследование встречалось гораздо чаще – в задачах на построение, в решении уравнений с параметром). Для того чтобы опровергнуть математическое предложение, достаточно получить такое его следствие, которое противоречит чему-то известному или данному в условии. Опровержение математического предложения может состоять в доказательстве предложения, являющегося его отрицанием, – косвенном доказательстве (замечу, что косвенные доказательства невозможны в юридической практике: работает так называемая презумпция невиновности). В таком случае говорим, что мы доказали «от противного».

В задачах исследовательского характера мы изначально не знаем, с каким предложением имеем дело: истинным или ложным. Начинаем получать из него следствия. Если приходим к противоречию, то исходное предложение является ложным. При этом можно считать, что попутно мы доказали (косвенно) предложение, являющееся отрицанием данного. В неявном виде здесь «упрятан» закон исключённого третьего, абсолютная применимость которого принимается не всеми математиками.

Наконец, символическая логика не всегда удобна в работе. Если для работы с компьютером она годится всегда, то при работе с людьми иногда стоит предпочесть более наглядные соображения. Разумеется, сюда можно отнести работу с кругами Эйлера (по моему разумению их корректное использование -
доказательство.

Следующий полезный шаг в деле внедрения логики в школьный курс математики – знакомство учеников с **таблицами истинности**, несложный формализм которых позволяет избежать многих натужных выводов. Так, в некоторых задачах проверку выполнимости следования можно свести к формальной проверке истинности импликации при условии, что условие истинно.

Пример 1. Даны утверждения.

1. Если многоугольник является треугольником или правильным многоугольником, то около него можно описать окружность.

2. Около многоугольника M можно описать окружность.

3. Многоугольник M – не треугольник.

Следует ли из этих трех утверждений, что M – правильный многоугольник?

Пример 2. Имеются утверждения.

1. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

2. Если в параллелограмме диагонали не перпендикулярны, то он не является ромбом.

Следует ли второе утверждение из первого?

А вот любопытная задача о раках.

Пример 3. Известно, что:

1. Если рак красный и варёный, то он мёртвый.
2. Если рак красный и мёртвый, то он варёный.

Следует ли из этого, что варёный и мёртвый рак – красный?

Разумеется, в этих примерах возможны разные способы получения результата, но работа с таблицами истинности почти алгоритмична.

Я не знаю, как достаточно просто убедить учеников в логическом законе контрапозиции, о котором упоминал выше. На основе таблиц истинности он выводится моментально. Но довелось мне увидеть, как закон контрапозиции доказывается от противного , что некорректно. Следуя методе, принятой в этих «доказательствах», можно «доказать», что если верно некое высказывание, то верно и ему обратное . Корректно как раз наоборот: метод доказательства от противного обоснован ссылкой на логический закон контрапозиции.

Приведу пример того, как работа с таблицами истинности позволяет откорректировать вольницу, которая иногда встречается.

Пусть мы имеем запись

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r,$$

в которой указано на равносильность трёх высказываний (или предикатов), $\leftrightarrow$ – знак операции эквивалентности на множестве высказываний. Так как в данной записи скобки опущены, естественно предположить ассоциативность этой операции. Так и есть: проверка по таблицам истинности показывает совпадение значений истинности высказываний

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \text{ и } p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r).$$

Итак, скобки в такой записи опускать можно.

Однако на практике исходная запись может быть воспринята как конъюнкция двух высказываний:

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r).$$

Таблицы истинности покажут нам, что такое толкование не соответствует истине: высказывания

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \text{ и } p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

имеют несовпадающие значения истинности.

Перейдём к школьной практике. Трактуя уравнение как предикат, мы можем написать

$$x^2 = 1 \leftrightarrow |x| = 1 \leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

(без всяких скобок). Но, произнося эту строчку вслух, не стоит употреблять союз *и*. Иначе говоря, произносить фразу: «Из того, что уравнение $x^2 = 1$ равносильно уравнению $|x| = 1$ *и* уравнение $|x| = 1$ равносильно совокупности $x = 1 \vee x = -1$ получается, что корнями данного уравнения являются числа 1 или –1». Мы здесь грешим против точности.

Дальнейшим шагом на пути внедрения логики в курс математики может стать ознакомление школьников с основами **булевой алгебры** . С её помощью можно быстро справиться со многими логическими задачами несложными чисто техническими средствами.

Применение булевой алгебры к контактным схемам служит убедительной иллюстрацией полезности математической логики. (Разве мог предположить такое сам Д. Буль?) На детей производит огромное впечатление, что возня с абстрактными символами позволяет решать конкретные задачи об электрических цепях. Одна из таких задач «висела» у меня дома. В коридоре была лампочка, а при ней были два выключателя, на каждом — две кнопки. Нажатие любой кнопки на любом выключателе приводило к смене состояния лампочки: если она горела, то после нажатия гасла, и напротив. Вопрос: какова соответствующая электрическая схема? Поднаторевшие мальчишки решали эту задачу безо всякой там алгебры логики, но тем интереснее было получить результат от тех, кто ни разу не возился с проводами.

И прекрасным примером тому, как нечто написанное математиком «из головы» спустя много лет находит применение в других науках и сферах человеческой деятельности: в информатике и в разработке компьютерных технологий, в криптологии. Оказалось, что ее можно использовать также в теории множеств и теории вероятностей.

Особый разговор поведу об **обратной теореме**. Мы, практически никогда не задумываясь, считаем, что высказывание, обратное высказыванию $p \to q$, выглядит так: $q \to p$. Однако не всё просто даже с предложением, условие и заключение которого содержит одно (без логических союзов) высказывание.

Рассмотрим дизъюнкцию двух импликаций в общем виде:

$$(p \to q) \vee (q \to p).$$

Проверка по таблицам истинности показывает, что она истинна, тогда хотя бы одно из высказываний должно быть истинно. Но мы знаем, что это не обязательно так: и прямое, и обратное предложения могут быть ложными.

Этот пример показывает сложности формализации. Необходим более серьёзный анализ процедуры *обращения* высказывания. В частности, при формулировке теоремы необходима разъяснительная часть, в которой «развешены» кванторы.

Например, теоремы вида

$$p \to (q \to r) \text{ и } (p \wedge q) \to r$$

равносильны, но обратные им теоремы

$$(q \to r) \to p \text{ и } r \to (p \wedge q),$$

полученные по стандартной схеме, – нет. И какую же из последних двух теорем мы будем считать обратной? А может и вовсе никакую: сделаем осмысленную перекомпоновку из простых высказываний данного предложения, которая приведёт нас к верному предложению, и именно его назовем обратной теоремой?

Итак, я не вижу бесспорного алгоритма или даже правила для создания обратного предложения. Поэтому говорить об обратной теореме как о полученной из прямой теоремы одной лишь перестановкой условия и заключения сомнительно. А может быть даже не разумно. Увы, мне не раз приходилось читать об этом в методической литературе, сталкиваться с тем, что в формулировке исходной теоремы игнорируются разъяснительная часть, семантика и акценты в расстановке союзов.

- Говоря об обратных предложениях, следует объяснить ученикам, в чём состоит *доказательство исключением* (теорема Гаубера, названная по имени немецкого математика), чтобы не доказывать обратные предложения каждый раз, когда можно дать одну только ссылку. Приведу теорему Гаубера (в усиленной форме). Пусть имеется система нескольких предложений вида $A_i \Rightarrow B_i$. Если предложения A_i и B_i содержат перебор всех возможностей, то верны и обратные предложения вида $B_i \Rightarrow A_i$. Такова схема, к примеру, когда мы рассматриваем зависимости между длинами наклонных и их проекций; видом треугольника и соотношением квадратов длин его сторон и т.д.

Сделаю несколько заключительных замечаний.

- И формальная, и математическая логика – это модели логики практической. А модель *не абсолютно* копирует реальный объект. Например, человек может «полагать», «предполагать», «надеяться», «верить», «думать» , «рассчитывать» и т. д. То есть, говоря об одном и том же событии, можно построить такие фразы, как: «Я полагаю, что…», «Я предполагаю, что…», «Я надеюсь, что…», «Я верю, что…», «Я думаю, что…», «Я расчитываю, что…». Оттенки очевидны и вряд ли формализуемы.

- Внедрение формальной и математической логики в школьный курс математики оправдано. Таких явных оправданий несколько.

1. Она способствует росту логической культуры школьника.
2. Она может помочь точному языку там, где это необходимо: в документах, юридических ситуациях, в ответственном разговоре
3. Она может помочь в усвоении математических предложений.
4. Она необходима для уяснения основ информатики.
5. Она эффективно работает в целом классе задач логического характера.
6. Она демонстрирует удивительную способность интеллекта – применять знания, полученные математиком в совершенно отвлеченной области, например в технике.
7. Работа с предикатами естественно увязана с основными понятиями теории множеств, без которых нынешнее математическое образование выглядит странно.
8. Сама идея – свести умозаключения к формальным алгебраическим выкладкам и её осуществление не могут не вызывать восхищение.

9. Ученикам должна быть понятна неэквивалентность формальной логики и «житейской». Проще всего показывать эту разницу на примерах. Вот один из них. Возьмем два простых и верных высказывания. 1. Если температура у человека повышается, то он потеет. 2. Если человек потеет, то его температура понижается. Формально конъюнкция верных высказываний верна, но что получается? А вот что: «Если температура человека повышается, то она у него понижается». Ничего себе, следствие! И в чем же дело?

В этой связи интересно обсудить такую ситуацию. Пусть задана система двух уравнений с одной переменной:

$$x=2,$$

Из нее (сложив и разделив полученное равенство пополам) получаем, что $x = 3$. Формально все верно: из ложного утверждения следует всё что угодно.

Любопытно, что если от точного знака равенства перейти в этих записях к приближенному, то получится вполне содержательный результат — среднее арифметическое двух измерений. Более того, именно по такому принципу мы порой выставляем отметки школьнику.

10.Вместе с тем, формальная и математическая логика не всегда применима на практике, иногда попросту неуместна и даже нелепа; она может только помочь человеку избежать явных логических ляпов. Надо хорошо понимать, насколько оправдано её применение в каждом конкретном случае.

11. Такие расхожие словечки, как «нужно», «надо», «можно», попавшие из житейской практики в математику, также требуют чёткого формального истолкования. А ещё лучше употреблять их пореже.

12. Тут же уместно сказать об употреблении логической символики; это стало достаточно привычным, но, увы, иногда делается неряшливо.

Ученикам надо объяснить, что знаки символической логики – это не знаки стенографии и в серьёзной работе как таковые недопустимы (учащиеся особенно любят использовать в таком качестве кванторы).

.

Всему этому стоит учить.