СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эти проверочные работы предназначены в первую очередь для тех учеников, которые изучают геометрию в специализированных математических классах по учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика. (Возможно, их смогут использовать учителя математики, преподающие и по другим учебникам геометрии.) Проверочные работы написаны в том же духе, что и сам учебник. Подчеркну, что геометрия видится как неразрывное единство воображения и логики, поэтому я старался в каждой проверочной работе в той или иной степени создать условия для развития геометрического воображения.

При составлении этих работ я попытался учесть самые разные соображения. Перечислю некоторые из них.

Каждая конкретная работа должна быть реальной для ученика. Иначе говоря, какая-то часть работы может быть выполнена им, хотя и без тщательного оформления.

В то же время эта работа должна быть реальной и для учителя, т. е. удобной для проверки, а это значит, что она не должна содержать длинных доказательств, варианты должны быть схожими, почти идентичными, геометрические фигуры изначально получают фиксированные буквенные обозначения и т. д.

В большинстве случаев задания в самостоятельных и контрольных работах построены по принципу «стрелы заданий», идущих по нарастающей сложности, что обеспечивает некий уровень индивидуализации. Хотелось также в каждое задание добавить немного неожиданности для ученика.

В целом каждая работа получилась достаточно объёмной, и вряд ли большинство учеников будет выполнять все задания. В этом случае учитель может действовать по своему усмотрению. Можно уменьшить число заданий, можно увеличить время, отведённое для решения (самостоятельная работа — 1 урок, контрольная работа — 2 урока), жёсткая система оценок вряд ли разумна, выкладки и ссылки учеников могут быть свёрнутыми. Вообще при работе на скорость (а таковой является любая самостоятельная работа, проводимая на уроке) ученики должны доверять своей пространственной интуиции, а учитель — быть не столь придирчивым по части обоснований.

Несколько технических замечаний:

1. Четырёхугольник *ABCD* или треугольник *ABC* будем считать нижним основанием призмы.

2. Если в задаче надо найти угол, то достаточно найти какую-либо его тригонометрическую функцию.

Предлагаемое пособие если и имеет аналогичных предшественников, то их не слишком много. Отсюда ясно, сколько у него может быть недостатков. Я буду признателен всем доброжелательным критикам. Все замечания и предложения можно присылать на мой электронный адрес: rvi@inbox.ru или на электронный адрес издательства «Просвещение»: irekman@prosv.ru.

Автор

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

С—1.1. Расстояние в пространстве

Вариант 1

В тетраэдре $ABCD$ основанием является правильный треугольник ABC со стороной 1, $DA = DC = 1$. Точка K — середина DA, точка L — середина BC.

1. Вычислите KL, если:

а) $BD = 1$;

б) $BD = \sqrt{2}$.

2. Пусть $BD = x$.

а) Выразите KL как функцию от x.

б) Может ли KL быть перпендикулярным AD и BC одновременно?

в) Может ли KL быть длиннее каждого ребра данного тетраэдра?

г) В каких границах изменяется KL при изменении BD?

Вариант 2

В тетраэдре $ABCD$ $DA = DB = DC = 1$. Основанием является равнобедренный треугольник ABC, причём $AB = BC = 1$. Точка K — середина AD, точка L — середина BC.

1. Вычислите KL, если:

а) $AC = 1$;

б) $AC = \sqrt{2}$.

2. Пусть $AC = x$.

а) Выразите KL как функцию от x.

б) Может ли KL быть перпендикулярным AD и BC одновременно?

в) Может ли KL быть длиннее каждого ребра данного тетраэдра?

г) В каких границах изменяется KL при изменении AC?

С—1.2. Сечения в тетраэдре

Вариант 1

ABCD — правильный тетраэдр. Точка *K* — середина *AC*, точка *L* — середина *BC*, точка *M* — середина *DB*, точка *N* — середина *DA*. Рассматриваются отрезки: а) *AC*; б) *DK*; в) *KN*; г) *KM*.

1. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через отрезки:

а) *AC* и *KM*;

б) *KN* и *KD*;

в) *KD* и *KM*;

г) *KN* и *KM*.

2. Каким многоугольником (по числу сторон) является сечение этого тетраэдра, проходящее через:

а) *DK*;

б) *KN*;

в) *KM*?

Нарисуйте эти сечения.

3. Через какой из этих четырёх отрезков проходит сечение тетраэдра, являющееся:

а) равносторонним треугольником;

б) равнобокой трапецией;

в) квадратом;

г) параллелограммом (не квадратом);

д) прямоугольным треугольником?

Нарисуйте такие сечения, если это возможно.

Вариант 2

$ABCD$ — правильный тетраэдр. Точка L — середина BC, точка M — середина DB, точка N — середина DA. Рассматриваются отрезки: а) BC; б) DL; в) LM; г) LN.

1. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через отрезки:

а) BC и LN;

б) DL и LM;

в) DL и LN;

г) LM и LN.

2. Каким многоугольником (по числу сторон) является сечение этого тетраэдра, проходящее через:

а) DL;

б) LM;

в) LN?

Нарисуйте эти сечения.

3. Через какой из этих четырёх отрезков проходит сечение тетраэдра, являющееся:

а) равносторонним треугольником;

б) равнобокой трапецией;

в) квадратом;

г) параллелограммом (не квадратом);

д) прямоугольным треугольником?

Нарисуйте такие сечения, если это возможно.

С—1.3. Взаимное положение двух прямых

Вариант 1

PABCD — правильная четырёхугольная пирамида, у которой все рёбра равны 1. В этой пирамиде проходит ломаная из четырёх звеньев. Все вершины ломаной лежат на поверхности пирамиды.

1. Первое звено ломаной — отрезок KL, где точка K — середина ребра PB, $KL \perp AC$.

а) Нарисуйте KL.

б) Найдите длину KL.

2. Второе звено ломаной — отрезок LM, $LM \parallel AK$.

а) Нарисуйте LM.

б) Найдите длину LM.

3. Третье звено ломаной — отрезок MD.

а) Нарисуйте MD.

б) Найдите длину MD.

4. Четвёртое звено ломаной — отрезок DN, который лежит на прямой, пересекающей прямые AK и PC.

а) Нарисуйте звено DN, имеющее наибольшую длину.

б) Найдите длину DN.

5. Какое из этих четырёх звеньев самое длинное?

Вариант 2

$PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, у которой все рёбра равны 1. В этой пирамиде проходит ломаная из четырёх звеньев. Все вершины ломаной лежат на поверхности пирамиды.

1. Первое звено ломаной — отрезок KL, где точка K — середина ребра PA, $KL \perp BD$.

а) Нарисуйте KL.

б) Найдите длину KL.

2. Второе звено ломаной — отрезок LM, $LM \parallel DK$.

а) Нарисуйте LM.

б) Найдите длину LM.

3. Третье звено ломаной — отрезок MC.

а) Нарисуйте MC.

б) Найдите длину MC.

4. Четвёртое звено ломаной — отрезок CN, который лежит на прямой, пересекающей прямые DK и PB.

а) Нарисуйте звено CN, имеющее наибольшую длину.

б) Найдите длину CN.

5. Какое из этих четырёх звеньев самое длинное?

<u>С—1.4. Расстояния и сечения</u>

Вариант 1

Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 4. Точка K — середина ребра BD, точка L — середина ребра CD, точка M — середина ребра AC.

1. Точка P — середина ребра AD, точка Q — середина ребра BC.

а) Нарисуйте общий отрезок сечений тетраэдра плоскостями KLM и PLQ.

б) Вычислите его длину.

2. Точка P_1 лежит на ребре AD, $AP_1 = 1$, точка L_1 лежит на ребре CD, $CL_1 = 1$, точка Q_1 лежит на ребре CB, $CQ_1 = 1$.

а) Нарисуйте общий отрезок сечений тетраэдра плоскостями KLM и $P_1L_1Q_1$.

б) Вычислите его длину.

3. Точки P_1, L_1, Q_1 лежат на тех же рёбрах тетраэдра, что и в задаче 2. При этом $AP_1 = CL_1 = CQ_1$.

а) Какой фигурой является сечение этого тетраэдра плоскостью $P_1L_1Q_1$?

б) В каких границах изменяется длина d общего отрезка сечений тетраэдра плоскостями KLM и $P_1L_1Q_1$?

Вариант 2

Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 4. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра AD, точка M — середина ребра AB.

1. Точка P — середина ребра BD, точка Q — середина ребра AC.

а) Нарисуйте общий отрезок сечений тетраэдра плоскостями KLM и PLQ.

б) Вычислите его длину.

2. Точка P_1 лежит на ребре BD, $BP_1 = 1$, точка L_1 лежит на ребре AD, $AL_1 = 1$, точка Q_1 лежит на ребре AC, $AQ_1 = 1$.

а) Нарисуйте общий отрезок сечений тетраэдра плоскостями KLM и $P_1L_1Q_1$.

б) Вычислите его длину.

3. Точки P_1, L_1, Q_1 лежат на тех же рёбрах тетраэдра, что и в задаче 2. При этом $BP_1 = AL_1 = AQ_1$.

а) Какой фигурой является сечение этого тетраэдра плоскостью $P_1L_1Q_1$?

б) В каких границах изменяется длина d общего отрезка сечений тетраэдра плоскостями KLM и $P_1L_1Q_1$?

С—2.1. Перпендикуляр к плоскости

Вариант 1

Из точки P на плоскость α проведён перпендикуляр PQ. На плоскости α находится прямая a. По прямой a движется в одном направлении отрезок AB. $PQ = AB = |Qa| = 1$.

1. Пусть $QB = 1$. Чему равно PA?

2. Пусть $PA = 2$. Чему равно QB?

3. Может ли $QB = PA$ при некотором положении точки A?

4. В каком положении отрезок AB виден из точки P под наибольшим углом?

Вариант 2

Из точки P на плоскость α проведён перпендикуляр PQ. На плоскости α находится прямая a. По прямой a движется в одном направлении отрезок AB. $PQ = AB = |Qa| = \mathrm{l}$.

1. Пусть $QA = 1$. Чему равно PB?

2. Пусть $PB = 2$. Чему равно QA?

3. Может ли $QA = PB$ при некотором положении точки A?

4. В каком положении отрезок AB виден из точки P под наибольшим углом?

С—2.2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Вариант 1

В тетраэдре $ABCD$ все углы при вершине D прямые. По ребру BC от точки B к точке C движется точка K. Пусть $KD = x$. $DA = DB = 1$, $DC = 2$.

1. Сколько прямоугольных граней в этом тетраэдре?

2. Докажите, что при любом x:

а) $AK > AD$;

б) $AK > KD$.

3. а) Выразите как функцию от x площадь треугольника AKD.

б) Установите границы, в которых она лежит.

4. Может ли:

а) прямая DK быть перпендикулярна плоскости ABC;

б) угол KDL быть прямым, если точка L находится на ребре AC и $BK = AL$?

Вариант 2

В тетраэдре $ABCD$ все углы при вершине D прямые. По ребру AB от точки A к точке B движется точка K. Пусть $KD = x$. $DA = DC = 1$, $DB = 3$.

1. Сколько прямоугольных граней в этом тетраэдре?

2. Докажите, что при любом x:

а) $CK > CD$;

б) $CK > KD$.

3. а) Выразите как функцию от x площадь треугольника CKD.

б) Установите границы, в которых она лежит.

4. Может ли:

а) прямая DK быть перпендикулярна плоскости ABC;

б) угол KDL быть прямым, если точка L находится на ребре BC и $AK = CL$?

С—2.3. Построение плоскости, перпендикулярной данной прямой

Вариант 1

Ребро правильного тетраэдра *ABCD* равно 2. Рассматриваются два сечения тетраэдра. Одно из них — площадью S_1 — перпендикулярно ребру *AD*, другое — площадью S_2 — перпендикулярно ребру *BD*. Оба они проходят через точку *K* на ребре *AD*.

1. а) Нарисуйте первое сечение, когда точка *K* — середина ребра *AD*.

б) Найдите его площадь.

2. а) Нарисуйте второе сечение, когда точка *K* — середина ребра *AD*.

б) Найдите его площадь.

3. а) Нарисуйте оба сечения, когда точка *K* — не середина ребра *AD*.

б) Пусть $DK = x$. Выразите $\frac{S_2}{S_1}$ как функцию от x.

в) Могут ли площади S_2 и S_1 быть равны?

Вариант 2

Ребро правильного тетраэдра *ABCD* равно 2. Рассматриваются два сечения тетраэдра. Одно из них — площадью S_1 — перпендикулярно ребру *AB*, другое — площадью S_2 — перпендикулярно ребру *AD*. Оба они проходят через точку *K* на ребре *AB*.

1. а) Нарисуйте первое сечение, когда точка *K* — середина ребра *AB*.

б) Найдите его площадь.

2. а) Нарисуйте второе сечение, когда точка *K* — середина ребра *AB*.

б) Найдите его площадь.

3. а) Нарисуйте оба сечения, когда точка *K* — не середина ребра *AB*.

б) Пусть $AK = x$. Выразите $\frac{S_2}{S_1}$ как функцию от x.

в) Могут ли площади S_2 и S_1 быть равны?

С—2.4. Параллельность и перпендикулярность

Вариант 1

К плоскости α проведён перпендикуляр AB ($A \in \alpha$), $AB = 2$. Через точку A проведена прямая a, перпендикулярная AB. На расстоянии 1 от прямой a на плоскости α находится точка C, и через неё проведён перпендикуляр CD к плоскости α (возможны два случая). $CD = AC = 1$.

1. а) На прямой a взята точка K, такая, что $BK = 3$. Чему равна длина DK?

б) Можно ли на прямой a найти такую точку L, что $BL = DL$?

2. а) На каком расстоянии от прямой a находится точка пересечения прямой BD и плоскости α?

б) Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке M. Из неё проводится перпендикуляр MN на плоскость α. Чему равна его длина?

Вариант 2

К плоскости α проведён перпендикуляр AB ($A \in \alpha$), $AB = 1$. Через точку A проведена прямая a, перпендикулярная AB. На расстоянии 4 от прямой a на плоскости α находится точка C, и через неё проведён перпендикуляр CD к плоскости α (возможны два случая). $CD = 2$, $AC = 1$.

1. а) На прямой a взята точка K, такая, что $BK = 2$. Чему равна длина DK?

б) Можно ли на прямой a найти такую точку L, что $BL = DL$?

2. а) На каком расстоянии от прямой a находится точка пересечения прямой BD и плоскости α?

б) Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке M. Из неё проводится перпендикуляр MN на плоскость α. Чему равна его длина?

С—2.5. Проведение перпендикуляра к плоскости

Вариант 1

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, точка K — середина ребра BB_1, $AB = 1$, $BB_1 = \sqrt{3}$.

1. Нарисуйте перпендикуляр:

а) из точки K на грань AA_1C_1C;

б) из точки B на плоскость AKC;

в) из точки L — середины ребра A_1C_1 — на плоскость AKC;

г) из точки B_1 на плоскость AKC;

д) из точки A_1 на плоскость AKC.

2. Чему равна длина самого длинного и самого короткого из построенных перпендикуляров?

Вариант 2

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, точка K — середина ребра AA_1, $AB = 1$, $AA_1 = \sqrt{3}$.

1. Нарисуйте перпендикуляр:

а) из точки K на грань BB_1C_1C;

б) из точки A на плоскость BKC;

в) из точки L — середины ребра B_1C_1 — на плоскость BKC;

г) из точки A_1 на плоскость BKC;

д) из точки C_1 на плоскость BKC.

2. Чему равна длина самого длинного и самого короткого из построенных перпендикуляров?

С—2.6. Свойства перпендикулярных плоскостей

Вариант 1

Равносторонний треугольник ABC и прямоугольник $ACDF$ лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 1$, $AF = 2$.

1. Сравните BF и BD.

2. Вычислите расстояние между центром треугольника и центром симметрии прямоугольника.

3. Пусть точка K — переменная точка ломаной ABC. В каких границах находится расстояние от точки K до центра симметрии прямоугольника?

4. Точка X начала движение из точки C по ломаной CBA, точка Y одновременно начала движение из точки A по отрезку AF. Они движутся с одной и той же постоянной скоростью до конца своего пути. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния XY?

Вариант 2

Равнобедренный треугольник ABC ($AB = CB$) и квадрат $ACDF$ лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 2$, $AF = 1$.

1. Сравните BF и BD.

2. Вычислите расстояние между точкой пересечения медиан треугольника и центром симметрии квадрата.

3. Пусть точка K — переменная точка ломаной AFD. В каких границах находится длина KB?

4. Точка X начала движение из точки C по отрезку CB, точка Y одновременно начала движение из точки A по ломаной AFD. Они движутся с одной и той же постоянной скоростью до конца своего пути. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния XY?

С—2.7. Признак перпендикулярности плоскостей

Вариант 1

В основании пирамиды $PABCD$ находится квадрат $ABCD$. Боковое ребро PB перпендикулярно основанию, $PB = AB = 1$.

1. Сколько боковых граней пирамиды перпендикулярно основанию?

2. Будут ли перпендикулярны между собой грани APD и CPD?

3. Проводится сечение пирамиды $AKLD$, где K лежит внутри PB, L лежит внутри PC.

а) Нарисуйте такое сечение.

б) Установите его форму.

в) Пусть $\angle KAB = \varphi$. Выразите площадь этого сечения как функцию от φ.

г) Может ли эта площадь равняться $\frac{1}{2}$?

4. Оцените периметр этого сечения.

Вариант 2

В основании пирамиды $PABCD$ находится квадрат $ABCD$. Боковое ребро PA перпендикулярно основанию, $PA = AB = 1$.

1. Сколько боковых граней пирамиды перпендикулярно основанию?

2. Будут ли перпендикулярны между собой грани CPD и CPB?

3. Проводится сечение пирамиды $CKLD$, где K лежит внутри PA, L лежит внутри PB.

а) Нарисуйте такое сечение.

б) Установите его форму.

в) Пусть $\angle KDA = \varphi$. Выразите площадь этого сечения как функцию от φ.

г) Может ли эта площадь равняться $\frac{1}{2}$?

4. Оцените периметр этого сечения.

С—2.8. Параллельность плоскостей

Вариант 1

В тетраэдре $ABCD$ ребро BD перпендикулярно грани ABC. $BD = 1$, $\angle ABC = 60°$, $AB = BC$, точка K — середина ребра AC, $BK = 1$. Перпендикулярно DK через точку внутри DK проводится сечение тетраэдра.

1. а) Нарисуйте такое сечение, когда оно проходит через точку B.

б) Докажите, что оно является равнобедренным треугольником.

в) Чему равна его площадь?

2. Может ли такое сечение быть равносторонним треугольником?

3. а) Докажите, что таким сечением может быть равнобокая трапеция.

б) В каких границах лежит площадь такого сечения?

Вариант 2

В тетраэдре $ABCD$ ребро BD перпендикулярно грани ABC. $BD = 1$, $\angle ABC = 120°$, $AB = BC$, точка K — середина ребра AC, $BK = 1$. Перпендикулярно DK через точку внутри DK проводится сечение тетраэдра.

1. а) Нарисуйте такое сечение, когда оно проходит через точку B.

б) Докажите, что оно является равнобедренным треугольником.

в) Чему равна его площадь?

2. Может ли такое сечение быть равносторонним треугольником?

3. а) Докажите, что таким сечением может быть равнобокая трапеция.

б) В каких границах лежит площадь такого сечения?

С—2.9. Параллельность прямой и плоскости

Вариант 1

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $AA_1 = 2$. Проводится сечение этой призмы, проходящее через точку B_1 и параллельное A_1C_1.

1. а) Нарисуйте такое сечение, когда оно проходит через точку A.

б) Докажите, что в случае а) оно не является равносторонним треугольником.

в) Нарисуйте такое сечение, когда оно проходит через точку K — середину AA_1.

г) Докажите, что в случае в) оно является ромбом.

д) Чему равна площадь сечения в случае в)?

2. Рассмотрим такое сечение, когда оно проходит через точку $L \in A_1K$. Как изменяется его площадь по мере удаления точки L от точки A_1?

3. Могут ли в таком сечении призмы быть равны три стороны?

Вариант 2

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $AA_1 = 2$. Проводится сечение этой призмы, проходящее через точку D и параллельное AC.

1. а) Нарисуйте такое сечение, когда оно проходит через точку A_1.

б) Докажите, что в случае а) оно не является равносторонним треугольником.

в) Нарисуйте такое сечение, когда оно проходит через точку K — середину AA_1.

г) Докажите, что в случае в) оно является ромбом.

д) Чему равна площадь сечения в случае в)?

2. Рассмотрим такое сечение, когда оно проходит через точку $L \in AK$. Как изменяется его площадь по мере удаления точки L от точки A?

3. Могут ли в таком сечении призмы быть равны три стороны?

С—2.10. Ортогональное проектирование

Вариант 1

$ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 2. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра BD, точка M — середина ребра AB, точка N — середина ребра AC.

1. а) Нарисуйте проекцию сечения $KLMN$ на плоскость ACD.

б) Докажите, что эта проекция является прямоугольником.

в) Чему равна площадь этой проекции?

2. а) Нарисуйте проекцию данного тетраэдра на плоскость $KLMN$.

б) Докажите, что эта проекция является квадратом.

в) Найдите площадь этой проекции.

Вариант 2

$ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 2. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра BD, точка M — середина ребра AB, точка N — середина ребра AC.

1. а) Нарисуйте проекцию сечения $KLMN$ на плоскость BCD.

б) Докажите, что эта проекция является прямоугольником.

в) Чему равна площадь этой проекции?

2. а) Нарисуйте проекцию данного тетраэдра на плоскость $KLMN$.

б) Докажите, что эта проекция является квадратом.

в) Найдите площадь этой проекции.

С—3.1. Расстояние между двумя точками

Вариант 1

В четырёхугольной пирамиде $PABCD$ все рёбра равны 1.

1. Чему равно расстояние между серединой ребра PB и:

а) точкой M на ребре AD, такой, что $AM = \frac{1}{4}AD$;

б) серединой ребра AD?

2. а) Пусть точка K лежит на ребре PB, а точка L — на ребре AD, $PK = DL = x$. Выразите KL как функцию от x.

б) В каких границах лежит длина отрезка KL?

3. Пусть точка K движется по ломаной $PBCP$, а точка L — по ломаной $DAPD$. Движение начато одновременно и идёт с одной скоростью. В каких границах лежит длина отрезка KL?

Вариант 2

В четырёхугольной пирамиде $PABCD$ все рёбра равны 1.

1. Чему равно расстояние между серединой ребра PA и:

а) точкой L на ребре CD, такой, что $DL = \frac{1}{4}DC$;

б) серединой ребра CD?

2. а) Пусть точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре CD, $PK = CL = x$. Выразите KL как функцию от x.

б) В каких границах лежит длина отрезка KL?

3. Пусть точка K движется по ломаной $PABP$, а точка L — по ломаной $CDPC$. Движение начато одновременно и идёт с одной скоростью. В каких границах лежит длина отрезка KL?

С—3.2. Теорема о трёх перпендикулярах

Вариант 1

$ABCD$ — ромб со стороной 1, $\angle A = \varphi$ ($\varphi < 90°$). К плоскости ромба в точке C проведён перпендикуляр KC длиной 1.

1. Пусть $\varphi = 60°$.

а) Нарисуйте перпендикуляр из точки K на прямую AD.

б) Найдите расстояние от точки K до прямой AD.

2. а) Нарисуйте перпендикуляр от точки K на прямую AB.

б) Найдите расстояние от точки K до отрезка AB.

3. а) Нарисуйте перпендикуляр из точки A на плоскость KBD.

б) Найдите расстояние от точки A до треугольника KBD.

4. В каких границах находится расстояние от точки K до треугольника ABD при изменении φ?

5. Может ли расстояние от точки B до плоскости AKD равняться расстоянию от точки B до треугольника AKD?

Вариант 2

$ABCD$ — ромб со стороной 1, $\angle A = \varphi$ ($\varphi > 90°$). К плоскости ромба в точке B проведён перпендикуляр KB длиной 1.

1. Пусть $\varphi = 120°$.

а) Нарисуйте перпендикуляр из точки K на прямую CD.

б) Найдите расстояние от точки K до прямой CD.

2. а) Нарисуйте перпендикуляр из точки K на прямую AD.

б) Найдите расстояние от точки K до отрезка AD.

3. а) Нарисуйте перпендикуляр из точки D на плоскость KAC.

б) Найдите расстояние от точки D до треугольника KAC.

4. В каких границах находится расстояние от точки K до треугольника ACD при изменении φ?

5. Может ли расстояние от точки A до плоскости CKD равняться расстоянию от точки A до треугольника CKD?

С—3.3. Расстояние от точки до фигуры

Вариант 1

$ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1, AA_1 — его высота. Точка K движется по ней от точки A к точке A_1.

1. Вычислите расстояние от точки A_1 до каркаса тетраэдра. (Каркас тетраэдра — это совокупность всех его рёбер.)

2. Вычислите расстояние от точки K до каркаса тетраэдра, когда $KA = \frac{1}{2}$.

3. Пусть траектория точки K такова: сначала от точки A по высоте AA_1 до некоторой точки, а затем от неё по прямой к ближайшей точке каркаса. Нарисуйте эту траекторию.

4. При каком положении точки K расстояние от неё до каркаса является наибольшим?

Вариант 2

$ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1, BB_1 — его высота. Точка K движется по ней от точки B к точке B_1.

1. Вычислите расстояние от точки B_1 до каркаса тетраэдра. (Каркас тетраэдра — это совокупность всех его рёбер.)

2. Вычислите расстояние от точки K до каркаса тетраэдра, когда $KB = \frac{1}{2}$.

3. Пусть траектория точки K такова: сначала от точки B по высоте BB_1 до некоторой точки, а затем от неё по прямой к ближайшей точке каркаса. Нарисуйте эту траекторию.

4. При каком положении точки K расстояние от неё до каркаса является наибольшим?

С—3.4. Расстояние между фигурами

Вариант 1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4. В грани $ABCD$ расположен круг K_1 радиусом 1. Центр O_1 этого круга находится в центре нижнего основания.

1. Пусть K_2 — круг в плоскости $A_1B_1C_1$ с центром в точке A_1 радиусом 1.

а) Нарисуйте кратчайший отрезок между кругами K_1 и K_2.

б) Вычислите расстояние между ними.

2. Пусть круг K_2 радиусом 1 движется в плоскости $A_1B_1C_1$ так, что его центр O_2 движется по ребру A_1D_1 от точки A_1 к точке D_1. В каких границах лежит расстояние между кругами K_1 и K_2?

3. Пусть круг K_2 радиусом 1 продолжает двигаться параллельно самому себе так, что его центр O_2 движется по ребру D_1D от точки D_1 к точке D. В каких границах лежит расстояние между кругами K_1 и K_2?

4. Пусть K_3 — круг в грани CC_1D_1D с центром O_3 в центре грани и радиусом 1.

а) Нарисуйте кратчайший отрезок между кругами K_1 и K_3.

б) Чему равно расстояние между кругами K_1 и K_3?

Вариант 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4. В грани $ABCD$ расположен круг K_1 радиусом 1. Центр O_1 этого круга находится в центре нижнего основания.

1. Пусть K_2 — круг в плоскости $A_1B_1C_1$ с центром в точке B_1 радиусом 1.

а) Нарисуйте кратчайший отрезок между кругами K_1 и K_2.

б) Вычислите расстояние между ними.

2. Пусть круг K_2 радиусом 1 движется в плоскости $A_1B_1C_1$ так, что его центр O_2 движется по ребру B_1A_1 от точки B_1 к точке A_1. В каких границах лежит расстояние между кругами K_1 и K_2?

3. Пусть круг K_2 радиусом 1 продолжает двигаться параллельно самому себе так, что его центр O_2 движется по ребру A_1A от точки A_1 к точке A. В каких границах лежит расстояние между кругами K_1 и K_2?

4. Пусть K_3 — круг в грани AA_1B_1B с центром O_3 в центре грани и радиусом 1.

а) Нарисуйте кратчайший отрезок между кругами K_1 и K_3.

б) Чему равно расстояние между кругами K_1 и K_3?

С—3.5. Расстояние в пространстве

Вариант 1

В четырёхугольной пирамиде $PABCD$ основанием является квадрат $ABCD$, грань PCD — равнобедренный треугольник ($PD = PC$), перпендикулярный основанию. $AD = 2$, расстояние от точки P до основания равно 1. Точка K — середина ребра PB, точка L — середина ребра AD, точка Q — середина ребра CD.

1. Вычислите расстояние:

а) KL;

б) от точки Q до плоскости PAB;

в) от прямой AD до плоскости PCB;

г) от прямой BC до прямой PA;

д) от вершины C до треугольника PBD.

2. Есть ли точка, которая равноудалена от всех:

а) вершин пирамиды;

б) плоскостей граней пирамиды?

Вариант 2

В четырёхугольной пирамиде $PABCD$ основанием является квадрат $ABCD$, грань PBC — равнобедренный треугольник ($PB = PC$), перпендикулярный основанию. $AD = 2$, расстояние от точки P до основания равно 1. Точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра CD, точка Q — середина ребра BC.

1. Вычислите расстояние:

а) KL;

б) от точки Q до плоскости PAD;

в) от прямой CD до плоскости PAB;

г) от прямой AB до прямой PD;

д) от вершины B до треугольника PDC.

2. Есть ли точка, которая равноудалена от всех:

а) вершин пирамиды;

б) плоскостей граней пирамиды?

С—3.6. Угол между прямыми; угол между лучами

Вариант 1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AD = 1$, $DC = 2$, $CC_1 = 3$.

1. Найдите угол между прямыми A_1D и D_1C.

2. Может ли угол между прямыми D_1X_1 и AC равняться 90°? (Точка X_1 лежит на ребре B_1C_1.)

3. Найдите угол α между прямыми B_1D и AC.

4. В каких границах лежит угол β между прямыми AA_1 и DX_2, где точка X_2 находится на ломаной $A_1B_1C_1$?

5. Точка K лежит на ребре D_1D, точка L — на ребре CC_1, $D_1K = CL$. Определите вид угла между лучами AK и LD.

Вариант 2

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AD = 1$, $DC = 3$, $CC_1 = 2$.

1. Найдите угол между прямыми A_1D и D_1C.

2. Может ли угол между прямыми D_1X_1 и AC равняться 90°? (Точка X_1 лежит на ребре B_1C_1.)

3. Найдите угол α между прямыми B_1D и AC.

4. В каких границах лежит угол β между прямыми AA_1 и DX_2, где точка X_2 находится на ломаной $A_1B_1C_1$?

5. Точка K лежит на ребре CD, точка L — на ребре D_1C_1, $CK = D_1L$. Определите вид угла между лучами AK и LD.

С—3.7. Угол прямой с плоскостью

Вариант 1

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $AA_1 = 2$.

1. а) Вычислите угол, который образует с плоскостью основания этой призмы её диагональ B_1D.

б) С какой гранью этой призмы диагональ B_1D образует наибольший угол?

2. Вычислите угол между диагональю B_1D и плоскостью ACC_1.

3. Пусть точка K движется по ребру DD_1 от точки D к точке D_1. Как изменяется угол между диагональю B_1D и плоскостью AKC?

Вариант 2

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $AA_1 = 2$.

1. а) Вычислите угол, который образует с плоскостью основания этой призмы её диагональ A_1C.

б) С какой гранью этой призмы диагональ A_1C образует наибольший угол?

2. Вычислите угол между диагональю A_1C и плоскостью BDD_1.

3. Пусть точка K движется по ребру CC_1 от точки C к точке C_1. Как изменяется угол между диагональю A_1C и плоскостью BKD?

С—3.8. Двугранный угол. Угол между плоскостями

Вариант 1

В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

1. а) Вычислите угол между плоскостью AB_1C и плоскостью основания.

б) Вычислите угол между плоскостями AB_1C и AA_1C.

в) С какой боковой гранью призмы плоскость AB_1C образует меньший угол?

2. Чему равен больший двугранный угол между плоскостями AB_1C и BCA_1?

3. Пусть точка K движется по ребру A_1A от A_1 к A, а точка L движется по ребру B_1B от B_1 к B. Движение начато одновременно и с одной и той же скоростью. Как изменяется угол между плоскостями ACL и BCK?

Вариант 2

В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

1. а) Вычислите угол между плоскостью A_1C_1B и плоскостью основания.

б) Вычислите угол между плоскостями A_1C_1B и AC_1C.

в) С какой боковой гранью призмы плоскость A_1C_1B образует меньший угол?

2. Чему равен больший двугранный угол между плоскостями A_1C_1B и B_1C_1A?

3. Пусть точка K движется по ребру AA_1 от A к A_1, а точка L движется по ребру BB_1 от B к B_1 Движение начато одновременно и с одной и той же скоростью. Как изменяется угол между плоскостями A_1C_1L и B_1C_1K?

С—3.9. Площадь ортогональной проекции

Вариант 1

В правильной треугольной пирамиде $PABC$ $AB = 1$, $\angle APB = \varphi$.

1. а) Нарисуйте проекцию грани PAB на плоскость ABC.

б) Чему равна площадь этой проекции?

2. Пусть S_1 — площадь проекции грани PAB на плоскость PAC.

а) Найдите S_1.

б) При каком угле φ величина S_1 составляет $\frac{1}{3}$ от площади боковой грани?

в) При каком угле φ величина S_1 равна площади боковой грани?

3. Могут ли быть равны площади проекций грани PAB на плоскости остальных граней?

Вариант 2

В правильной треугольной пирамиде $PABC$ $PA = 1$, $\angle APB = \varphi$.

1. а) Нарисуйте проекцию грани PBC на плоскость ABC.

б) Чему равна площадь этой проекции?

2. Пусть S_1 — площадь проекции грани PBC на плоскость PAC.

а) Найдите S_1.

б) При каком угле φ величина S_1 составляет $\frac{1}{3}$ от площади боковой грани?

в) При каком угле φ величина S_1 равна площади боковой грани?

3. Могут ли быть равны площади проекций грани PBC на плоскости остальных граней?

С—3.10. Трёхгранный угол

Вариант 1

В трёхгранном угле с вершиной O и лучами a, b, c $\angle ca = \angle cb = 90°$, $\angle ab = 120°$. Внутри угла проведён луч Ox. Пусть $\angle xa = \angle xb = \alpha$.

1. а) Чему равен угол β между лучом x и плоскостью, в которой лежат лучи a, b?

б) Чему равен угол φ между лучами x и c?

в) Может ли $\angle xc = \alpha$?

2. а) Докажите, что лучи a и b образуют с плоскостью, проходящей через лучи c и x, равные углы.

б) Найдите величину этого угла.

3. Установите вид двугранного угла с ребром x, одна грань которого проходит через луч a, а другая — через луч b.

Вариант 2

В трёхгранном угле с вершиной O и лучами a, b, c $\angle ca = \angle cb = 90°$, $\angle ab = 60°$. Внутри угла проведён луч Ox. Пусть $\angle xa = \angle xb = \alpha$.

1. а) Чему равен угол β между лучом x и плоскостью, в которой лежат лучи a, b?

б) Чему равен угол φ между лучами x и c?

в) Может ли $\angle xc = \alpha$?

2. а) Докажите, что лучи a и b образуют с плоскостью, проходящей через лучи c и x, равные углы.

б) Найдите величину этого угла.

3. Установите вид двугранного угла с ребром x, одна грань которого проходит через луч a, а другая — через луч b.

С—3.11. Углы

Вариант 1

В трёхгранном угле с вершиной O и рёбрами OA, OB, OC угол AOB прямой. $\angle AOC = \angle BOC = 120°$. В нём проведён луч OD.

1. Пусть $\angle AOD = \angle BOD = 60°$.

а) Найдите угол между лучом OD и плоскостью OAB.

б) Найдите угол между лучами OD и OC.

2. Пусть $\angle AOD = \angle BOD = 45°$. Найдите угол между лучом OD и плоскостью $A_1B_1C_1$, если точки A_1, B_1, C_1 находятся на лучах OA, OB, OC соответственно, причём $OA_1 = OB_1 = OC_1$.

3. Можно ли провести луч OD так, чтобы двугранный угол с ребром OD и полуплоскостями AOD, COD равнялся двугранному углу с ребром OD и полуплоскостями AOD, BOD?

Вариант 2

В трёхгранном угле с вершиной O и рёбрами OA, OB, OC угол COB прямой. $\angle AOC = \angle AOB = 120°$. В нём проведён луч OD.

1. Пусть $\angle BOD = \angle COD = 60°$.

а) Найдите угол между лучом OD и плоскостью OBC.

б) Найдите угол между лучами OD и OA.

2. Пусть $\angle BOD = \angle COD = 45°$. Найдите угол между лучом OD и плоскостью $A_1B_1C_1$, если точки A_1, B_1, C_1 находятся на лучах OA, OB, OC соответственно, причём $OA_1 = OB_1 = OC_1$.

3. Можно ли провести луч OD так, чтобы двугранный угол с ребром OD и полуплоскостями BOD, COD равнялся двугранному углу с ребром OD и полуплоскостями AOD, BOD?

С—4.1. Определение сферы и шара

Вариант 1

Вершины равностороннего треугольника ABC, имеющего сторону a, лежат на сфере с центром в точке O и радиусом R. Расстояние от O до треугольника ABC равно b.

1. а) Пусть $R = a = 1$. Вычислите b.

б) Докажите, что $R^2 = \frac{a^2}{3} + b^2$.

в) Что происходит с b при увеличении a (в данной сфере)?

г) Пусть сторона a увеличилась в 2 раза. Может ли при этом расстояние b уменьшиться в 2 раза?

2. Рассмотрим ещё одну сферу с центром в точке O, которая касается всех сторон треугольника ABC.

а) Пусть $R = a = 1$. Вычислите расстояние между этими сферами.

б) Что происходит с расстоянием между этими сферами при увеличении b?

в) Что происходит с этим расстоянием при увеличении a?

Вариант 2

Вершины квадрата $ABCD$, имеющего сторону a, лежат на сфере с центром в точке O и радиусом R. Расстояние от O до квадрата $ABCD$ равно b.

1. а) Пусть $R = a = 1$. Вычислите b.

б) Докажите, что $R^2 = \frac{a^2}{2} + b^2$.

в) Что происходит с b при увеличении a (в данной сфере)?

г) Пусть сторона a увеличилась в 2 раза. Может ли при этом расстояние b уменьшиться в 2 раза?

2. Рассмотрим ещё одну сферу с центром в точке O, которая касается всех сторон квадрата $ABCD$.

а) Пусть $R = a = 1$. Вычислите расстояние между этими сферами.

б) Что происходит с расстоянием между этими сферами при увеличении b?

в) Что происходит с этим расстоянием при увеличении a?

С—4.2. Сечение шара (сферы) плоскостью

Вариант 1

Дана сфера радиусом 1. На расстоянии 2 от неё находится прямая. Через неё проведены две плоскости, образующие между собой угол φ. Они пересекают данную сферу по равным окружностям.

1. Чему равен радиус этих окружностей?

2. В каких границах находится при изменении φ расстояние между:

а) центрами этих окружностей;

б) самими окружностями?

3. Может ли на данной сфере находиться окружность, имеющая с каждой из данных окружностей одну общую точку и равная этим окружностям?

Вариант 2

Дана сфера радиусом 2. На расстоянии 1 от неё находится прямая. Через неё проведены две плоскости, образующие между собой угол φ. Они пересекают данную сферу по равным окружностям.

1. Чему равен радиус этих окружностей?

2. В каких границах находится при изменении φ расстояние между:

а) центрами этих окружностей;

б) самими окружностями?

3. Может ли на данной сфере находиться окружность, имеющая с каждой из данных окружностей одну общую точку и равная этим окружностям?

С—4.3. Плоскость, касательная к сфере

Вариант 1

Сфера с центром O и радиусом 1 касается плоскости α в точке A. Точка B лежит на этой сфере, и удалена от плоскости α на расстояние, меньшее 1. Через точку B проходит плоскость β, касательная к этой сфере. Плоскости α и β пересекаются по прямой p, прямая OB пересекает плоскость α в точке C, угол между прямой OB и плоскостью α равен φ.

1. Чему равен угол между плоскостями α и β?

2. а) Чему равно расстояние от точки C до прямой p, когда φ = 45°?

б) Что происходит с этим расстоянием при увеличении φ?

в) Может ли расстояние от точки C до прямой p равняться 1?

Вариант 2

Сфера с центром O и радиусом 1 касается плоскости α в точке A. Точка B лежит на этой сфере, и удалена от плоскости α на расстояние, большее 1. Через точку B проходит плоскость β, касательная к этой сфере. Плоскости α и β пересекаются по прямой p, прямая OB пересекает плоскость α в точке C, угол между прямой OB и плоскостью α равен φ.

1. Чему равен угол между плоскостями α и β?

2. а) Чему равно расстояние от точки C до прямой p, когда φ = 45°?

б) Что происходит с этим расстоянием при увеличении φ?

в) Может ли расстояние от точки C до прямой p равняться 1?

<u>С—4.4. Цилиндр</u>

Вариант 1

Осевое сечение цилиндра — прямоугольник AA_1B_1B, в котором AB — диаметр основания цилиндра и равен 2, $AA_1 = 1$. Точки K и L начинают одновременно двигаться по окружностям оснований цилиндра по часовой стрелке со скоростью $v = 1$. Точка K движется от A_1 к B_1, точка L — от B к A.

1. Вычислите в момент времени t:

а) KL;

б) угол φ между прямой KL и плоскостью осевого сечения AA_1B_1B;

в) угол, под которым виден отрезок KL из точки A.

2. Пусть расстояние от точки K до осевого сечения AA_1B_1B равно d. Чему равно расстояние до него же от точки L?

3. Пусть точка K наиболее удалена от плоскости осевого сечения AA_1B_1B. Чему равно в этот момент расстояние от KL до:

а) AA_1; б) AB?

Вариант 2

Осевое сечение цилиндра — прямоугольник AA_1B_1B, в котором AB — диаметр основания цилиндра и равен 2, $AA_1 = 1$. Точки K и L начинают одновременно двигаться по окружностям оснований цилиндра против часовой стрелки со скоростью $v = 1$. Точка K движется от A_1 к B_1, точка L — от B к A.

1. Вычислите в момент времени t:

а) KL;

б) угол φ между прямой KL и плоскостью осевого сечения AA_1B_1B;

в) угол, под которым виден отрезок KL из точки A.

2. Пусть расстояние от точки K до осевого сечения AA_1B_1B равно d. Чему равно расстояние до него же от точки L?

3. Пусть точка K наиболее удалена от плоскости осевого сечения AA_1B_1B. Чему равно в этот момент расстояние от KL до:

а) AA_1; б) AB?

С—4.5. Конус

Вариант 1

Образующая конуса равна 2, а угол в осевом сечении при вершине конуса равен 90°. Проводится сечение конуса в виде равнобедренного треугольника с углом при вершине 60°.

1. Пусть эти сечения пересекают основание конуса по параллельным хордам. Вычислите:

а) расстояние между этими параллельными хордами;

б) угол α, который составляют между собой плоскости данного сечения и осевого сечения.

2. Пусть эти сечения пересекают основание конуса по хордам, имеющим общий конец. Вычислите:

а) расстояние между другими концами этих хорд;

б) угол β, который составляют между собой плоскости данного сечения и осевого сечения.

Вариант 2

Образующая конуса равна 2, а угол в осевом сечении при вершине конуса равен 120°. Проводится сечение конуса в виде равнобедренного треугольника с углом при вершине 90°.

1. Пусть эти сечения пересекают основание конуса по параллельным хордам. Вычислите:

а) расстояние между этими параллельными хордами;

б) угол α, который составляют между собой плоскости данного сечения и осевого сечения.

2. Пусть эти сечения пересекают основание конуса по хордам, имеющим общий конец. Вычислите:

а) расстояние между другими концами этих хорд;

б) угол β, который составляют между собой плоскости данного сечения и осевого сечения.

<u>С—4.6. Усечённый конус</u>

Вариант 1

Осевое сечение усечённого конуса представляет собой трапецию T с основаниями 4 и 2 и боковой стороной, равной 2. В этом усечённом конусе проведено сечение, являющееся трапецией T', основания которой параллельны основаниям трапеции в осевом сечении.

1. Пусть угол между плоскостями этих трапеций равен φ. Чему равна площадь трапеции T'?
2. При каком угле φ площадь проекции T' на плоскость осевого сечения составляет половину площади осевого сечения?
3. В каких границах находится площадь трапеции T' при изменении φ?

Вариант 2

Осевое сечение усечённого конуса представляет собой трапецию T с основаниями 2 и 1 и боковой стороной, равной 1. В этом усечённом конусе проведено сечение, являющееся трапецией T', основания которой параллельны основаниям данной трапеции.

1. Пусть угол между плоскостями этих трапеций равен φ. Чему равна площадь трапеции T'?
2. При каком угле φ площадь проекции T' на плоскость осевого сечения составляет половину площади осевого сечения?
3. В каких границах находится площадь трапеции T' при изменении φ?

<u>С—4.7. Тела</u>

Вариант 1

В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ высота PQ равна 4, а диагональ основания равна 12.

1. С центром в середине высоты этой пирамиды в плоскости, перпендикулярной этой высоте, проводится окружность радиусом 2. Проходит ли она через внешние точки этой пирамиды?

2. Линия F образована всеми точками X, такими, что $XP = XQ = a$.

а) При каком значении a линия F состоит только из внутренних точек пирамиды?

б) При каком значении a она содержит четыре граничные точки пирамиды?

в) Пусть $a = 3$. Сравните длину той части линии F, которая проходит через внутренние точки пирамиды, с длиной той части линии, которая проходит через внешние точки пирамиды. (Граничные точки пирамиды при нахождении длины можно отнести и к внутренним, и к внешним.)

Вариант 2

В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ высота PQ равна 2, а диагональ основания равна 6.

1. С центром в середине высоты этой пирамиды в плоскости, перпендикулярной этой высоте, проводится окружность радиусом 1. Докажите, что она содержит внешние точки этой пирамиды.

2. Линия F образована всеми точками X, такими, что $XP = XQ = a$.

а) При каком значении a линия F состоит только из внутренних точек пирамиды?

б) При каком значении a она содержит четыре граничные точки пирамиды?

в) Пусть $a = 1{,}5$. Сравните длину той части линии F, которая проходит через внутренние точки пирамиды, с длиной той части линии, которая проходит через внешние точки пирамиды. (Граничные точки пирамиды при нахождении длины можно отнести и к внутренним, и к внешним.)

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1

Вариант 1

$ABCD$ — правильный тетраэдр, ребро которого равно 6. Точка K — середина AD, точка L лежит на ребре AC, точка M лежит на ребре BD.

1. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через точки K, L, M, если:

а) $CL = 2$, $DM = 2$;

б) $CL = 3$, $DM = 3$.

2. а) Пусть $CL = 2$. Где должна находиться на ребре BD точка M, чтобы сечение тетраэдра плоскостью KLM было трапецией?

б) Для трапеции, полученной в пункте а), вычислите длину LM.

3. Пусть точка M — середина BD. Рассматриваются всевозможные трапеции с основанием KM, являющиеся сечениями этого тетраэдра. В каких границах лежит длина диагонали таких трапеций?

4. Пусть точка M — середина BD, точка L лежит на AC, $CL = 2$, точка N лежит на BC, $CN = 2$. Чему равна длина отрезка, лежащего в тетраэдре, проходящего через точку N и пересекающего прямые AD и LM?

5. Может ли площадь сечения, проходящего через точки K и M (M — середина BD):

а) равняться 25;

б) быть больше 15?

Вариант 2

$ABCD$ — правильный тетраэдр, ребро которого равно 6. Точка K — середина CD, точка L лежит на ребре BC, точка M лежит на ребре AD.

1. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через точки K, L, M, если:

а) $BL = 2$, $DM = 2$;

б) $BL = 3$, $DM = 3$.

2. а) Пусть $BL = 2$. Где должна находиться на ребре AD точка M, чтобы сечение тетраэдра плоскостью KLM было трапецией?

б) Для трапеции, полученной в пункте а), вычислите длину LM.

3. Пусть точка M — середина AD. Рассматриваются всевозможные трапеции с основанием KM, являющиеся сечениями этого тетраэдра. В каких границах лежит длина диагонали таких трапеций?

4. Пусть точка M — середина AD, точка L лежит на BC, $BL = 2$, точка N лежит на AC, $AN = 2$. Чему равна длина отрезка, лежащего в тетраэдре, проходящего через точку N и пересекающего прямые BD и LM?

5. Может ли площадь сечения, проходящего через точки K и M (M — середина AD):

а) равняться 25;

б) быть больше 15?

К—2

Вариант 1

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны основанию, $\angle ABC = 60°$, $PB = BA = 1$.

1. а) Нарисуйте сечение этой пирамиды, проходящее через ребро AC, плоскостью, перпендикулярной PD.

б) Вычислите его площадь.

2. а) Нарисуйте сечение этой пирамиды, проходящее через ребро AC, плоскостью, параллельной PD.

б) Вычислите его площадь.

3. а) Нарисуйте сечение этой пирамиды, проходящее через ребро AC, плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC.

б) Вычислите его площадь.

4. Можно ли сравнить площади, полученные в задачах 1—3, без их вычисления?

5. Проводятся сечения, перпендикулярные ребру PD. Какое из них имеет наибольшую площадь проекции на плоскость основания?

Вариант 2

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны основанию, $\angle ABC = 120°$, $PB = BA = 1$.

1. а) Нарисуйте сечение этой пирамиды, проходящее через ребро AC, плоскостью, перпендикулярной PD.

б) Вычислите его площадь.

2. а) Нарисуйте сечение этой пирамиды, проходящее через ребро AC, плоскостью, параллельной PD.

б) Вычислите его площадь.

3. а) Нарисуйте сечение этой пирамиды, проходящее через ребро AC, плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC.

б) Вычислите его площадь.

4. Можно ли расположить в порядке возрастания площади, полученные в задачах 1—3, без их вычисления?

5. Проводятся сечения, перпендикулярные ребру PD. Какое из них имеет наибольшую площадь проекции на плоскость основания?

К—3

Вариант 1

Две правильные пирамиды $DABC$ и $FABC$ имеют общее основание ABC и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах D и F прямые. Боковое ребро каждой пирамиды равно 1.

1. Вычислите расстояние:

а) от точки C до плоскости ADF;

б) от точки D до треугольника BCF.

2. Найдите угол:

а) между прямыми AD и BF;

б) между прямой AD и плоскостью BCF;

в) между плоскостями ACD и BCF.

3. Найдите площадь проекции грани ADB на плоскость BCF.

Вариант 2

Две правильные пирамиды $DABC$ и $FABC$ имеют общее основание ABC и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах D и F прямые. $AB = 1$.

1. Вычислите расстояние:

а) от точки B до плоскости ADF;

б) от точки F до треугольника BCD.

2. Найдите угол:

а) между прямыми AD и BF;

б) между прямой AD и плоскостью BCF;

в) между плоскостями ACD и BCF.

3. Найдите площадь проекции грани ADB на плоскость BCF.

К—4

Вариант 1

Плоскость α является опорной для конуса и шара, причём проходит она через основание конуса. Шар и конус имеют единственную общую точку K и лежат с одной стороны от α. Радиус шара равен R, образующая конуса равна L и составляет с основанием угол φ.

1. На каком расстоянии от плоскости α находится точка K:

а) если $L = 2$, $R = 1$, $\varphi = 60°$;

б) в общем случае?

2. Находятся ли на одной прямой центр шара, центр основания конуса и точка K, если $L = 2$, $R = 1$, $\varphi = 60°$?

3. Через точку K проводится плоскость β, параллельная плоскости α. Могут ли быть равны сечения шара и конуса плоскостью β?

4. Пусть цилиндр имеет одну общую внутри образующей его поверхности точку и с конусом, и с шаром, а плоскость α является опорной для цилиндра и проходит через его образующую. При этом цилиндр находится в том же полупространстве, что конус и шар, а ось цилиндра перпендикулярна плоскости, проходящей через ось конуса и центр шара. Чему равен наименьший радиус основания такого цилиндра, если $L = 2$, $R= 1$, $\varphi = 60°$?

Вариант 2

Плоскость α является опорной для конуса и шара, причём проходит она через вершину конуса перпендикулярно его высоте. Шар и конус имеют единственную общую точку K и лежат с одной стороны от α. Радиус шара равен R, образующая конуса равна L и составляет с основанием угол φ.

1. На каком расстоянии от плоскости α находится точка K:

а) если $L = 2$, $R = 1$, $\varphi = 60°$;

б) в общем случае?

2. Находятся ли на одной прямой центр шара, центр основания конуса и точка K, если $L = 2$, $R = 1$, $\varphi = 60°$?

3. Через точку K проводится плоскость β, параллельная плоскости α. Могут ли быть равны сечения шара и конуса плоскостью β?

4. Пусть цилиндр имеет одну общую внутри образующей его поверхности точку и с конусом, и с шаром, а плоскость α является опорной для цилиндра и проходит через его образующую. При этом цилиндр находится в том же полупространстве, что конус и шар, а ось цилиндра перпендикулярна плоскости, проходящей через ось конуса и центр шара. Чему равен наименьший радиус основания такого цилиндра, если $L = 2$, $R = 1$, $\varphi = 60°$?