«Джентльмены, это, наверно, правда, но она абсолютно парадоксальна, мы не можем понять её, и мы не знаем, что она значит, но мы доказали её, и потому мы знаем, что она должна быть достоверной.»

Бенджамин Пирс о формуле Эйлера $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Современная тенденция гуманитаризации образования ограничится лишь разговорами, если не изменятся цели и ценности математического образования, содержание образования, учебники и программы. Привычные нам «знания и умения» должны не то чтобы исчезнуть или даже отойти на второй план, но для начала хотя бы потесниться. И мы видим, как в новых проектах появились иные термины, в частности, **понимание**.

Но что такое **понимание**? Толкование этого термина в философии, психологии, специалистами по искусственному интеллекту чрезвычайно разнообразно, порой не стыкуется. Можно найти несколько соответствующих исследований в общей дидактике, но до методики, насколько я знаю, результаты этих размышлений не дошли. И абсолютно неясно, что стоит за оборотом: "ученик должен понимать", уже встретившимся в проектах нормативных документов. Что же конкретно он должен, если речь идет об определении, формуле, теореме, методе, разделе курса, всего предмета? Поскольку теоретического ответа на эти вопросы, видимо, нет, а проблема стучится в наши классы, приходится идти от собственного опыта, что я и попробую. Разумеется, мой ответ не будет полным - я не представляю себе полного освещения этой проблемы, столь она громадна, но я и не претендую на изречение истин, а всего лишь высказываю мнение. В целом оно сложилось более 10 лет назад, но не застыло, продолжает видоизменяться и финал этого процесса постижения даже не просматривается . Продвигаясь практически вслепую, одно я усек точно - **понимание** ученика формируется не только традиционной деятельностью учителя, я бы даже сказал, что она недостаточна. Необходима деятельность, направленная специально на **понимание**, и, разумеется, она определяется **пониманием**, которое "сидит" в голове у самого учителя.

Чтобы не свести разговор о понимании к декларациям, я попытаюсь отразить намеченную проблематику на конкретной теме школьного курса - на комплексных числах, причем в изложении ее для учеников математической школы. Я заметил, что проблема **понимания** для "продвинутых" учеников не менее остра, чем в массовой школе, хотя и другого характера. Об этом феномене можно бы поговорить подробнее, но не буду отвлекаться.

В дальнейшем тексте встретятся вопросы и задания к ученикам (выделены курсивом), когда я с ними вел соответствующие уроки. Вместе с тем я позволю себе давать комментарии, которые предназначены для учителя. Некоторые из них - почти очевидные, но которые мы порой забываем - выделены жирным шрифтом в угловых скобках. Вопросы и задания для учеников и комментарии для учителей, я надеюсь, трудно перепутать.

Оговорю, что не только термин "**понимание**", но и некоторые другие ("проблемная ситуация") я оставляю здесь без дефиниций, иначе пришлось бы уходить очень далеко в сторону . Надеюсь, что это не испортит дела .

****

Обычно комплексное число вводится в алгебраической форме. Говорится, что комплексными числами называются числа вида $a + bi$, где a и b -

вещественные числа и полагается по определению, что действовать с комплексными числами будем как с многочленами, учитывая, что $i^2 = - 1$ (1).

И сразу же несколько загвоздок. Загвоздка первая. Непонятно, что это за знак «+» между а и bi? Определения для сложения вещественного числа и комплексного еще не было, разговор только начинается, но пока нет этого определения, знак «+» бессмыслен. Запись bi порождает аналогичное недоумение. Отсутствие знака в этом месте - по аналогии с предыдущими записями такого вида - пропуск знака умножения. Но определения для умножения вещественного числа на комплексное тоже еще не было. Как не было упоминания о том, что вещественное число - частный случай комплексного, а потому неясно, на каком множестве определяются эти операции. Поэтому и знак сложения, и пропущенный знак умножения могут рассматриваться только как формальные символы, вне всяких ассоциаций с предыдущим их употреблением. Очень сильная условность, явно сбивающая с толку, хотя и временная.

<**Препятствует пониманию использование символа, имеющего неоднозначный смысл.** >

Не уместнее ли писать вместо a + bi нечто такое: a * b**i, заменив знаки сложения и умножения на соответствующие звездочки, тем самым лишая эту запись "вредных" ассоциаций? Г. В. Дорофеев идет еще дальше - он предлагает вместо символа i ставить символ ∧(2). И получится вот что: комплексным числом называется число вида a * b**∧, где a и b - вещественные числа, при условии, что $\wedge^2 = - 1$ и что действовать с комплексными числами будем как с многочленами.

При такой записи, не ассоциирующейся с чем-то известным, появляется вторая загвоздка, порождающая недоумение - а с чего это такую "бяку" мы называем числом?

<**Препятствует пониманию использование известных терминов в новом качестве** >

Известный аргумент:" Смотрите, как хорошо все потом получается ! " не успокаивает. Кто знает, может быть и при другом определении комплексного числа тоже все получится? Сие возможно - (3) Это раз. Два. Частенько говорят: "Вы пока делайте, а **понимание** придет потом." Мы действительно частенько полагаем, что **понимание** растет вместе с количеством проделанных упражнений. Будто вообще достаточно запомнить, правильно воспроизводить и уметь пользоваться, а **понимание** приложится. **О**днако ясно, что дело не в количестве упражнений, а в их качестве, в их разнообразии и значимости. От того, что ученики прорешают, к примеру, десятки уравнений про синус и косинус ничуть не углубится их **понимание** тригонометрических функций. Другое дело - периодические процессы, гармонические колебания, я уже не говорю о ряде Фурье. И про комплексные числа - то же самое. Будто бы, научившись исправно действовать с комплексными числами, мы станем лучше их понимать. **И**стория появления и осмысления комплексных чисел как раз говорит о том, что можно искусно производить с ними разнообразнейшие манипуляции, но быть далеким от **понимания** того, с чем имеешь дело.

<Препятствует пониманию однотипное повторение .>

Здесь же рядом наше убеждение в том, что **понимание** облегчается при тщательном логическом построении излагаемой темы. Оно выросло из нашего математического образования и того, что реализовано в современных учебниках для школы и тем более для высшей школы. В них принят онтодидактический подход. Суть его, если совсем коротко, такова: идти от логики, а не от истории. При таком подходе с пути ученика убираются все камни преткновения, все проблемы, которые и привели к созданию рафинированного изложения. Разумеется, при онтодидактическом подходе мы выигрываем во времени. Но, уверен, проигрываем в **понимании**. (Все так и должно быть – если где-то что – то улучшается, то где - то что – то ухудшается – «закон сохранения качества».) Хорошо известно : логичное - не значит понятное. Ещё Пуанкаре удивлялся – как может быть непонятна логика? Почему такое происходит ? В частности, потому, что такой подход убирает проблемную ситуацию, приведшую к появлению нового знания и, тем самым, начало пути к его **пониманию -** здесь я нашел поддержку у Поппера (4).

< **Убирая проблемную ситуацию, приведшую к возникновению понятия, мы уходим с дороги, ведущей к пониманию этого понятия**.>

Вот пример в нашем случае. Можно вводить комплексное число как упорядоченную пару вещественных чисел. (5, 6). Но и при таком подходе все те же загвоздки. Первая - в определении действий и особенно умножения комплексных чисел. Почему мы выбираем именно такое совершенно искусственное, "взявшееся с потолка" определение: если $z_1 = (x_1, y_1)$ и
$z_2 = (x_2, y_2)$, то $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$? Вторая - а на каком основании мы такую пару называем числом? К примеру, вектор на плоскости также можно трактовать как упорядоченную пару вещественных чисел, но никто на основании этого не называет такой вектор числом.

Идея использования упорядоченной пары хорошо известна в арифметике - (7) . Упорядоченные пары натуральных чисел могут служить исходным объектом для построения теории отрицательных чисел, а упорядоченные пары целых чисел - для построения теории рациональных чисел. Если бы мы именно так действовали ранее, то построение множества комплексных чисел как упорядоченных пар вещественных было бы вполне естественным. Но ведь в школьном курсе математики делается не так, а потому теория комплексных чисел как пар вещественных валится на головы учеников как снег среди ясного неба.

Можно ли предложить другой подход к комплексным числам? Принципиально другой, не онтодидактический? Положительный ответ на этот вопрос, относящийся не только к этой теме, хорошо известен. Существует генетический подход, при котором изложение материала следует тому, как он появлялся в ходе исторического развития. Если это невозможно реализовать полностью, то хотя бы эскизно. На этом пути п**онимание** возникает прежде всего из рассмотрения возникшей проблемной ситуации - надо пояснить ученикам, почему без нового знания что-то не получается. Далее, по мере расширения сферы действия нового знания, возникают еще проблемы, надо и про них не умолчать. Очищенный от случайного, генетический подход погружает ученика в процесс поиска истины, формирующий **понимание**.
(Известно - именно такой подход и есть логический.) Диапазон использования этого подхода может быть достаточно широк: от попутно излагаемых сведений до - в мечтах - полного изложения темы.

<Способствует пониманию генетический (исторический) подход.>

Все дальнейшее - эскизное описание проблемных ситуаций, встретившихся при построении теории комплексных чисел, а также описание путей их разрешения в практике преподавания.

Начнем с Кардано. Именно в его сочинении в 1545 году была предложена формула для решения кубического уравнения
$x^3 + px + q = 0$. Эта формула имела такой вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}\ .$$

История появления этой формулы красочна сама по себе и подробно описана в книгах по истории математики, например, в (8). Замечу, что в этой книге авторы пишут такое: "…Кардано, свободно складывавший и перемножавший мнимые числа, так и не понял окончательно их природы и считал их совершенно ненужными и бессмысленными." (Тем самым авторы полагают, что уметь - не значит понимать. По моему, у Кардано в этом смысле много общего с нашими учениками.) Вернемся, однако, к формуле. Рассмотрим такое уравнение $x^3 - 21x + 20 = 0$ (цитируется по книге (9)). Начнем его решать по формуле Кардано, но ничего не выйдет, ибо под квадратным корнем оказывается число «-243». С другой стороны, его можно решить, отыскивая известным способом целые корни многочлена - получим три корня: 1,4,-5.

Проблемная ситуация N 1.

Ведь что получилось - в результате манипуляций с чем-то неведомым (извлекли квадратный корень из отрицательного числа, а потом еще были разные операции с этой чертовщиной) - и вдруг в результате выскакивает число. Как же такое происходит в результате манипуляций неизвестно с чем!

Сам Кардано не придумал объяснения случившемуся.

"А вы бы придумали?"

Ситуацию немного прояснил Бомбелли (1572) . Он заметил, что под радикалами третьей степени стоят сопряженные выражения вида а $\pm\sqrt{b}$, где
$b < 0$. Если извлечь из них кубические корни, как мы бы делали с числами, то потому получается число, что мы суммируем также сопряженные выражения, в результате чего корни исчезают.

Проверьте.

По поводу результата Бомбелли в (10) написано так: " Бомбелли каким-то чудом сообразил, что кубический корень из комплексного числа вновь является комплексным числом, причем комплексная сопряженность сохраняется."

И вот тут нас ждет третья загвоздка - а почему мы с какими-то неведомыми выражениями работаем как с числами: извлекаем корни, затем складываем? Мы просто по инерции полученные выражения называем числами, хотя бы и мнимыми. Давайте уберем инерцию и будем называть их , как я уже выразился, "бяками" (далее - без кавычек). И вот тут - то нашей прыти действовать по аналогии заметно поубавится. Откуда мы знаем, что бяки можно складывать? А если можно, то как? Ну, ладно, предположим, что складываем как многочлены: две бяки прибавить три бяки будет пять бяк. Хотя, как сказать. Две бяки, будь они числами, это два, умноженное на бяку. Но как понимать произведение числа на бяку? Какой природы этот объект? Число? Бяка? Что - либо еще? Далее, как понимать, к примеру, такое выражение :
$1 + \sqrt{-1}$. Иначе говоря, как к числу прибавить бяку? И опять - что при этом будет получаться - число или опять же бяка, или может быть что-то третье?

Рискнем, следуя иным советам, и начнем действовать с бяками как с числами - вдруг все будет получаться как нам хочется - и довольно быстро придем к недоумению. Предположим, мы хотим перемножить две бяки: $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$. Действуя, как с числами, мы получим $\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$ (так полагал, в частности, Эйлер). Но, например, Безу считал, что должно быть $-\sqrt{ab}$. Дискуссия между двумя математиками такой величины настораживает - оказывается, не все так просто. И путаница случалась порой грандиозная.

Проблемная ситуация N 2.

Если действовать с бяками, как с числами, то в некоторых случаях все получается хорошо, а других - мы натыкаемся на противоречия.

Ваши предложения?

Сейчас можно позволить себе более общий разговор о числах вообще. А что такое число как таковое? Что мы имеем ввиду, когда говорим, к примеру, что e^{π} является числом? Разумеется, число - такой объект, с которым можно работать по определенным правилам. e^{π} является числом именно потому, что мы знаем как с этим выражением действовать. И дело не в том, что мы нарисуем к примеру знак + между e^{π} и π^{e}, после чего заявим, что мы эти два числа сложили. И даже не в том, что мы начнем каким - то образом выписывать десятичные знаки в результате. Числами эти символы делают свойства основных с ними операций. (При традиционном школьном изложении теории вещественных чисел доказательства этих свойств обычно не проводят из-за технической сложности. При аксиоматическом введении вещественных чисел как элементов поля возникают другие замысловатые проблемы.)

Для чисел существуют две основных операции - сложение и умножение , относительно каждой из которых множество этих объектов (с оговоркой относительно нуля) должно быть коммутативной группой. Если на множестве изучаемых объектов этих двух (или им аналогичных) операций нет или они есть, но у них нет групповых свойств (как, например, при умножении векторов), то нет и чисел. С бяками тут все в порядке.

Проверьте.

Так что, уже можно называть их числами?

Как вы думаете?

Самая пора сказать о сравнении чисел. Любые два (различных) числа сравнимы, причем сравнение должно быть увязано с операциями. Например, умножение положительных чисел должно быть монотонно : если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$ (то же, если $a < 0$ и $b < 0$). Но тут нас ждет полный афронт: как раз для бяк это требование не выполняется, ибо $i^{2} = -1$. И Эйлер (в отчаянии?) написал:"…корни квадратные из отрицательных чисел …суть числа невозможные. "

Как вы думаете, что он имел ввиду?

Так думали тогда все математики и называли бяки воображаемыми (мнимыми) числами. (Вспомните : у гиперболы есть мнимая ось, в оптике - мнимое изображение, а у Мольера - комедия "Мнимый больной".) То есть бяки и не числа вовсе.

В каком - то смысле история повторялась. С таким же трудом воспринимались в свое время отрицательные числа. Это трудно себе сейчас представить, мы изучаем их чуть ли не в начальной школе, все видели термометр за окном. Штифель называл отрицательные числа фиктивными, Декарт - ложными. Виета их вообще не признавал, хотя и работал с ними. Есть объяснение таким странностям –

попробуйте его предложить.

Оно такое. Для многих математиков тех времен понятие числа было тождественно понятию величины (это сохранилось и по сию пору в терминологии - мы говорим "абсолютная величина", "величина угла"). А реальные величины были, естественно положительными. Даже с нулем были проблемы - его только в конце 18 века признали за число - как это "ничто" может быть числом? Да что там с нулем - были проблемы даже с единицей - началом натурального ряда, ее тоже до поры, до времени числом не считали.

Как вы думаете, почему?

Позволю себе небольшое отступление.

Представим себе, - говорю я ученикам, *- что в руки Архимеда попал современный калькулятор. Пусть он умеет делать только четыре арифметических действия. Сможет ли Архимед догадаться, что перед ним за прибор? Учтите, что он не знает ни арабских цифр, ни современных обозначений знаков действий, ни знака равенства. Он даже про число 0 не знает. Но гениален.*

Ответ более или менее очевиден - разгадали же археологи древние письмена - буквы и числа.

Немного "философии" . Как понимать существование чисел ? Существует ли натуральный ряд? Кто его, собственно, видел во всей красе? Существует ли даже число 1? Не один предмет, а число 1? А если и да, то в каком смысле? Или это чистая идея? Но тогда и все остальные числа "живут" только в голове человека или, если угодно, в платоновском мире идей. Следуя (в свободной трактовке) Попперу (4) назовем этот мир так: Мир - 3 (Мир - 1 - это мир реальных объектов, Мир - 2 - это мир психических состояний человека, куда отнесем и его мышление.) Сразу получается, что комплексные числа "живут" в Мире - 3.

Существование математических объектов в современном толковании - это отсутствие противоречий: объект существует, поскольку он каким - нибудь образом вписывается в непротиворечивую аксиоматику. Посему существование комплексных чисел мы сейчас сводим к существованию вещественных чисел, с которыми " все в порядке". Но психологическое восприятие существования совсем иное. Существует то, что мы видим, слышим, то, что сделано, построено. Нам - то хочется, чтобы комплексные числа были и в Мире - 1, как, например, вещественные, которые мы можем "увидеть" на прямой или в виде отрезков на плоскости, полученных в результате геометрического построения.

Нестыковка Мира - 3 и Мира - 1 порождает ощущение интеллектуального дискомфорта в Мире - 2. Вот еще одна цитата из (10) :

" Комплексные числа на длительное время превратились во что-то таинственное, но полезное для решения математических проблем. Поэтому математики, хотя и не верили в их реальность, привыкали с ними работать. Как говорится, «глаза страшатся, а руки делают.»

Как вы думаете, какую реальность имеют ввиду авторы этой цитаты?

Тут стоит добавить, что долгое время бяки использовались только как средство получения какого - то результата, как некий формализм для вывода окончательных соотношений. Один пример хорошо известен: произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, есть сумма квадратов двух целых чисел. И формулировка, и результат относятся к целым числам, но существует доказательство этого утверждения, использующее бяки. Вот оно. Пусть $p = a^2 + b^2$, $q = c^2 + d^2$. Тогда

$$pq = (a^2 + b^2) (c^2 + d^2) = (a + bi) (a - bi) (c + di) (c - di) =$$
$$((a + bi) (c + di))((a - bi) (c - di)) =$$
$$((ac - bd) + (ad + bc) i) ((ac - bd) - (ad + bc)i) =$$
$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Уместно заметить, что этот результат, переложенный на комплексные числа, выглядит так: квадрат модуля произведения двух комплексных чисел равен произведению квадратов модулей этих чисел. Пенроуз (11) называет это равенство "замечательным математическим фактом". (Пенроуз - крупный современный математики и физик. Нам он известен из популярной литературы как автор "треугольника Пенроуза " и по книге Гарднера (12)) .

Однако в некоторых случаях бяки стали появляться и как результат, причем с наибольшим эффектом в анализе бесконечно малых.

Проблемная ситуация N 3.

Например, Лейбниц, интегрируя некоторые рациональные функции, получил результаты, в которых появились логарифмы бяк. Формально это могло получиться так. Дробь $\frac{1}{1+x^2}$ разложим на простейшие. Получим $\frac{1}{1+x^2} = \frac{0,5}{1+xi} + \frac{0,5}{1-xi}$. Проинтегрируем обе части равенства (глазам страшно, а руки делают!). Получим с одной стороны arctg x + C_1, а с другой стороны $\frac{1}{2i}\ln\frac{1+xi}{1-xi}$ +C_2. Положим в этом равенстве x = 0 и увидим, что $C_1 = C_2$, , а за ним и сногсшибательное равенство: arctg x = $\frac{1}{2i}\ln\frac{1+xi}{1-xi}$. А если еще взять x = 1, то после небольших преобразований результат и вовсе ослепительный:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\ln i}{i} \qquad (*).$$

Понимай, как хочешь! Но как? Я бы на месте первооткрывателя этих равенств долго ходил обалделый.

Как истолковывать написанное?

Проблемная ситуация N 4.

Что еще пуще, бяки оказались полезны для решения практических задач, например, Эйлер применил их для решения задач картографии. Более того, теперь известно, как плодотворно используются комплексные числа в электротехнике и радиотехнике, механике, квантовой механике.

Попробуйте дать свое объяснение.

Чтобы "глазам было нестрашно", бяки пытались истолковать геометрически (Валлис, Кюн). Попытка вполне разумная - ведь иллюстрируют же таинственный до поры до времени $\sqrt{2}$ диагональю единичного квадрата. Для истолкования $\sqrt{-1}$ предлагали нарисовать числовую ось, отложить на ней два числа: +1 и -1, а затем построить по известным правилам отрезок, являющийся средним геометрическим из этих двух. Из начала оси он торчал вертикально, длина его равнялась 1, но сам он изображал уже $\sqrt{-1}$.

Вас это устраивает?

(В (9) объясняется, почему эта интерпретация некорректна.) Были и другие попытки геометрического толкования (Эйлер). Но в итоге Эйлер же полагал, что дать его невозможно.

Первым, кто понял, как можно дать бякам реальное истолкование (в смысле Мира - 1) был Вессель. Каков был ход его мыслей - неизвестно. Можно разве что предположить следующее (в современной терминологии). Числа служат для счета и для сравнения величин. Но величины ведь бывают разные. Есть скалярные величины - масса, стоимость. И числа вполне их характеризуют. Но есть векторные величины - сила, скорость. И чисел недостаточно для их характеристики. Тех чисел, которые хорошо известны - вещественных, ибо они не учитывают направления векторных величин. Так может быть бяки - как раз те самые объекты, которые могут характеризовать векторные величины? И эту идею, которая почему-то не пришла в голову выдающимся математикам тех времен, Вессель, который не был даже профессиональным математиком, развил полностью.

Как вы думаете, в чем тут причина?

Возможный ответ таков. После Декарта математики начали избавляться от примата геометрии при построении алгебры. Алгебра начала выстраиваться как наука об операциях, то есть на арифметических основаниях. И Вессель понял, что требуется дать реальное истолкование не столько самим бякам, сколько действиям с ними. Вот что говорится в (9):" В качестве основных Вессель ставит перед собой две следующие задачи:

1. Найти единое аналитическое выражение, способное выразить как длину, так и направление каждого расположенного на плоскости отрезка в зависимости от двух данных направленных отрезков.
2. Так определить операции сложения и умножения над этими аналитическими выражениями, чтобы они были способны выражать изменения, которым могут подвергаться длины и направления отрезков."

Возможно, Вессель рассуждал примерно так. Числа можно изображать на прямой. Бяки будут изображаться на плоскости. Но прямая - часть плоскости. Значит, числа должны входить в множество бяк. Поэтому надо просто обобщить действия с числами, создать такую арифметику для бяк, которая включала бы в себя арифметику чисел.

А что для этого требуется?

Обобщить определения действий над числами.

Как же это делает Вессель? Если не вдаваться в детали, то картина его теории такова. Он рисует систему координат и откладывает на осях четыре единичных вектора: 1,-1, i, -i (сам Вессель вместо i ставит ε). Бяку $z = x + yi$ он изображает вектором $\vec{z}$ с началом в начале координат и концом в точке (x,y) - как мы делаем и сейчас. Суммой бяк z_1, z_2 он называет бяку z, соответствующую диагонали $\vec{z}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{z_1}, \vec{z_2}$.

Тут ученикам, для которых действия с векторами в координатной форме уже известны, легко показать, что сложение векторов в координатной форме дает такие же результаты как уже привычные действия с бяками.

Проблемная ситуация N 5.

Трудности начинаются, когда мы переходим к умножению.

Видно, что умножение векторов (скалярное) и умножение бяк различаются.

Ваши предложения?

Произведением z_1,z_2 Вессель называет такое z, которое соответствует вектору $\vec{z}$, получающемуся из вектора $\vec{z_2}$ так же, как вектор $\vec{z_1}$ получается из вектора +1. Заметим, что в этом толковании треугольник с вершинами в точках O, +1, z_1 подобен треугольнику с вершинами в точках O, z_2, z_1z_2 .

Нарисуйте это.

Встает вопрос, откуда Вессель взял такое соображение?

А вот откуда. Со времен Ньютона (то есть за век до Весселя) для действий с дробями была общепринятой такая точка зрения на умножение: под умножением понимать действие с "помощью которого ищут новую величину, находящуюся со множителем в таком же отношении …, какое множитель имеет к единице." (10) Мы можем увидеть здесь завуалированную пропорцию: ab/b = a/1. Почему так сложно? Поясню. Понятно, что означает умножение числа, скажем на 5 - это повторение слагаемым 5 раз. Но что значит умножить число на 2/3 , на - 2, на $\sqrt{2}$ или на π? Тут уже ничего не повторяют, а делают что-то другое, например, составляют пропорцию. Так что ничего необычного в этом месте Вессель не придумал.

Ну, а что делать с этим определением дальше?

Можно моментально получить такие равенства: $1 * i = i$, $i * 1 = i$, $i * i = -1$.

Проделайте это.

Тем самым пропадает мистика с равенства $i^2 = -1$.

Проблемная ситуация N 6.

А как же быть с умножением произвольных бяк?

Что вы предложите?

Вессель перешел к тригонометрии. Каждую бяку z он охарактеризовал известным еще Эйлеру тригонометрическим равенством $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, понимая под r и φ то же, что мы сейчас понимаем. Из подобия треугольников, упомянутых выше, моментально получается, что аргумент произведения бяк z_1z_2 равен сумме аргументов z_1 и z_2.

Проверьте это.

Переводя это наблюдение на геометрический язык, мы говорим, что при умножении бяка поворачивается на некоторый угол. Совсем красиво выглядит умножение на i - это поворот вектора на 90^0. Удивительная процедура, которая позволяет изящно решать геометрические задачи - об этом хорошо написали Моденов (13) , Скопец (14) и Понарин (15) .

А дальше что?

Для упрощения выкладок рассмотрим далее только те бяки, которым соответствуют единичные векторы. Тогда

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \cos\ \varphi_1 + i\ \sin\varphi_1\ , \quad z_2 = x_2 + iy_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\ ,$$

$$z_1z_2 = x_3 + iy_3 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Формулы тригонометрии уже хорошо известны, а потому

$$x_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = x_1x_2 - y_1y_2,$$

$$y_3 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 = x_1y_2 + x_2y_1.$$

В результате получаем формулу, к которой так стремились:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\ (x_1y_2 + x_2y_1).$$

(Любопытно, что сейчас и в теории, и в преподавании можно все "перевернуть" - сначала построить полную теорию комплексных чисел и экспоненты, а из нее вывести формулы тригонометрии (16).)

Я не утверждаю, разумеется, что так все и было на самом деле, что именно так Вессель шел к достижению своей цели. Но почему бы и нет? Представляю себе, как он подскочил на стуле, когда все так прекрасно завершилось. Только вот беда - его работа стала известна математикам только через 100 лет, а потому, говоря о векторной интерпретации комплексных чисел, упоминают куда чаще имя другого математика - Аргана, который пришел к этим же идеям позже Весселя (и на работу которого вначале тоже не обратили внимания). В самой же математике такая интерпретация стала общепринятой после одного из сочинений Гаусса (1832).

Имея ясное геометрическое толкование, бяки перешли из Мира - 3 в Мир - 1. Интеллектуальный комфорт в Мире - 2 был восстановлен. Арифметика бяк оказалась столь же естественна, как арифметика положительных чисел. Позволим себе теперь (только теперь !) уйти от терминологии бяк и называть их комплексными числами. Этот термин ввел в 1803 году Карно - так что какое-то основание для термина "бяка" мы имели.

Запись для комплексного числа в виде a + bi впервые употребил Гаусс в 1832 году, до него писали $a + b\ \sqrt{-1}$, хотя символ i для $\sqrt{-1}$ ввел Эйлер в 1777 году. Различие между i и $\sqrt{-1}$ было обнаружено позже. Для этого пришлось разобраться с извлечением корня из комплексного числа и уточнить понимание самого символа $\sqrt{\ }$. На множестве вещественных чисел и на множестве комплексных чисел этот знак трактуется по - разному.

Ваши гипотезы о том, как это произошло?

<Препятствует пониманию нечёткое использование математической символики. >

Прежде чем называться числами, бяки, как мы видим, прошли мучительный путь, да и потеряли на этом пути возможность сравнения.

Использование наглядных геометрических образов для толкования комплексных чисел столь убедительно, что есть учебники для школы, в которых о комплексных числах именно так и рассказано с самого начала (17). Определение комплексных чисел в этой книге таково:" Комплексным числом называется вектор на плоскости, имеющий своим началом нулевую точку действительной оси." А умножение комплексных чисел определяется здесь в полном соответствии с идеей Весселя. Разумеется, авторы знают, почему они выбирают такой подход. Но как ответить на вопрос ученика:"А зачем понадобилось уже известному объекту - вектору - давать другое название? Да еще такое - число."

<П**репятствуют пониманию немотивированные определения. >**

Вот теперь пора поговорить об еще одной загвоздке, четвертой по счету. Бяки, то бишь комплексные числа, появились в результате того, что некая операция на множестве чисел оказалась невыполнимой (извлечение корня квадратного из отрицательного числа). Кто знает, может быть какая - то операция на множестве комплексных чисел приведет к появлению новых бяк?

П р о б л е м н а я с и т у а ц и я N 7.

На современном языке постановка этого вопроса звучит так: "Является ли множество комплексных чисел замкнутым не только относительно сложения и умножения, но и относительно других известных операций, из коих наибольший интерес представляет извлечение корня и возведение в степень?"

Как бы вы ответили на этот вопрос?

К этой же проблеме можно подойти иначе. Комплексные числа потребовались для решения квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Но кто нам заранее сказал, что при решении алгебраических уравнений более высоких степеней не понадобятся еще какие - нибудь числа?

Как бы вы ответили на этот вопрос?

Что касается извлечения корня, то ответ стал ясен после того, как Муавр нашел формулу для возведения комплексного числа в натуральную степень - результатом будет также комплексное число. А что получится, к примеру, если рассматривать такие выражения: 1^i или ln (- 1)? Или "еще хуже": i^i или ln i? Лейбниц и Эйлер полагали, что логарифмы отрицательных чисел существуют и являются комплексными числами. И. Бернулли и Даламбер, напротив, полагали, что они вещественны. Более того, они считали, что ln (-1) = 0. Проследим за выкладками Даламбера (в письме к Эйлеру от 24.03.1747 года):

$-1 = \frac{1}{-1}$. Отсюда $\ln(-1) = \ln(+1) - \ln(-1)$, $2\ln(-1) = \ln(+1) = 0$,

поэтому и получается, что $\ln(-1) = 0$.

Как бы вы опровергли Даламбера?

Эйлер, ему отвечая в письме от 15.04.1747 , ссылался на равенство (*), из которого следует, что ln i, а потому и ln (-1) отличен от нуля.

Убедитесь в этом.

Хотел бы заметить вот что. Именно дискуссии столпов математической мысли относительно сущей по нынешним временам ерунды и показывают, как трудно добывается **понимание** и возможность прогресса в математическом образовании. Более того, тут есть что не понимать - об этом говорит дальнейшее развитие теории функций комплексной переменной и топологии

(но это очень уж далеко от нашей тематики).

То, что Эйлер уже тогда понимал все так, как надо, неудивительно. Еще в 1740 году в письме к И. Бернулли он привел формулу

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \qquad (\ ** \ ),$$

к которой пришёл, решая дифференциальное уравнение гармонического колебания.

А вы смогли бы повторить его достижение на этом пути?

(Если учеников познакомили достаточно полно с гармоническим колебанием, то вопрос уместен .) А в 1743 году он опубликовал свою знаменитую формулу

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x \qquad (\ *** \ ).$$

Ее можно получить из формул (*) и (**).

Попытайтесь сделать эту несложную выкладку.

Впрочем, к этой же формуле можно прийти, рассматривая разложения в ряд Тейлора cos x, sin x, e^x, и взяв в ряде Тейлора для e^x в качестве переменной ix.

Проверьте это.

Формулу (***) можно получить вполне в духе Эйлера на основе гармонического колебания.

Уравнение гармонического колебания имеет вид: Y`` + Y = 0 при условии, что Y (0) = a, Y` (0) = b. Известно, и это легко проверить непосредственно, что функция Y = a cos x + b sin x является его решением, отвечающим начальным условиям. Известно (так называемая задача Коши), что такое дифференциальное уравнение имеет решение, притом единственное.

Не взирая « на мелочи », вроде того, что для комплексной переменной мы можем действовать только по аналогии с вещественной переменной, положим начальные такими, чтобы решением этого уравнения была функция cos x + i sin x . Получим тогда, что Y (0) = 1, Y` (0) = i. Легко убедиться теперь в том, что функция $Z = e^{xi}$ также отвечает тому же уравнению и тем же начальным условиям. В силу единственности решения получаем, что Z = Y. Тем самым мы приходим к равенству $e^{xi} = \cos x + i \sin x$.

Доказательство единственности решения уравнения гармонического колебания при заданных начальных условиях можно провести, не ссылаясь на задачу Коши.

Для начала докажем, функция V (x) , отвечающая исходному уравнению и начальным условиям V (0) = 0, Y` ( 0 ) = 0 тождественно равна нулю. Для этого рассмотрим функцию $W = V^2 + (V`)^2$. Тогда W` = 2VV` + 2V`V``= 2V` ( V + V``) = 0 (так как в скобке стоит нуль). Поэтому функция W является константой. Так как $W (0) = V^2 (0) + (V`)^2 (0)$, то, согласно начальным условиям, W (0) = 0. Будучи константой, функция W тождественно равна 0.

Теперь рассмотрим функцию e^{xi} - (cos x + i sin x) . Непосредственной проверкой убеждаемся, что она удовлетворяет исходному дифференциальному Уравнению, а также тому, что и на сама , и её первая производная в нуле обращаются в нуль. Тем самым доказано их совпадение.

Любопытно тут заметить, что формулу (***) получил еще в 1714 году Котес, друг и ученик Ньютона, профессор в Кембридже, не кто-нибудь. (Он же, Котес, первым получил формулу для приближенного интегрирования, которая теперь носит имя Симпсона. Вот так ему "повезло" в истории математики.) Однако же странно, почему его результаты, опубликованные за 20 лет до Эйлера, остались неизвестными. Непонятные были времена, не правда ли?

Зная формулу Эйлера, можно получить формулу для логарифмов и отрицательных, и комплексных чисел.

Попробуйте это сделать сами - увидите много интересного.

Завершим этот разговор утверждением о том, что множество комплексных чисел оказалось замкнутым относительно основных алгебраических операций.

Чтобы в этом убедиться, попробуйте разобраться в том, что представляют собой такие выражения: $z_1^{z_2}$ и $\ln_{z_1} z_2$, где z_1 и z_2 - комплексные числа.

А формула Эйлера - замечательна. Из нее, в частности следует удивительное равенство: $e^{\pi i} + 1 = 0$. В этом равенстве - число e, представляющее математический анализ, число π из мира геометрии и число i , возникшее в алгебре. В нем знак равенства – чуть ли не основной знак в математике вообще. В нем два фундаментальных числа: 1 (основа натурального ряда) и 0 (без него нет позиционной системы счисления). Про 1 и 0 можно и отдельную книжечку написать. Наконец в ней три основных операции над числами: сложение, умножение и возведение в степень.

Если немного «поиграть» с этой формулой и её следствиями, можно получить нечто забавное. Вот несколько примеров.

1) Возведём равенство $e^{\pi i} = -1$ в квадрат и получим $e^{2\pi i} = 1$, откуда $2\pi i = 0$. Остаётся уточнить, какой из этих трёх сомножителей равен 0. Дело вкуса. Кроме того, полученный результат можно интерпретировать как длину окружности радиуса i, которая равна 0.

2) Равенство $e^{2\pi i} = 1$ можно переписать в виде $e^{2\pi i} = 1^{2\pi}$, а затем в виде $(e^i)^{2\pi} = 1^{2\pi}$, откуда имеем $e^i = 1$. Поэтому либо i = 0, либо e = 1 - опять же по вкусу. Можно работать иначе: $e^{2\pi i} = 1$ можно переписать в виде $e^{2\pi i} = 1^i$, а затем в виде $(e^{2\pi})^i = 1^i$, откуда имеем $e^{2\pi} = 1$. Поэтому либо π= 0, либо e = 1 - опять же по вкусу.

3) Перепишем равенство $e^{\pi i} + 1 = 0$. в виде $e^{\pi i} = -1$ и прологарифмируем обе части равенства по натуральному основанию, получим: ln (πi) = ln (-.1) и далее ln π + ln i = ln (-.1). Так как $i^2 = -1$, то получим далее
$\ln \pi + \ln i = \ln i^2 .= 2\ln i$, откуда ln π = ln i , а потому π = i . Если к тому же вернуться к исходному равенству, то получим два «любопытных» равенства:
$e^{\pi^2} = -1$ и $e^{-1} = -1$ и, наконец, $e = -1$.

4) Запишем теперь такое равенство π i = 2ln i, откуда получим π/2 = (ln i)/i = . $\ln (i^{\frac{1}{i}})$, откуда $i^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{\pi}{2}}$. Возведя левую часть последнего равенства в степень i^2 , а правую в степень -1 (что одно и то же), получим совсем забавное равенство:

$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

5) Ещё два равенства.

$(-1)^i = (i^2)^i = i^{2i} = (i^i)^2 = (e^{-\frac{\pi}{2}})^2 = e^{-\pi}$.

Естественно было бы ожидать, что $1^i = -e^{-\pi}$. Но

$1^i = (-1)^i \cdot (-1)^i = e^{-\pi} \cdot e^{-\pi} = e^{-2\pi}$.

Получается такое равенство $e^{-\pi} = e^{-2\pi}$, откуда $e^{\pi} = 1$. Ещё раньше было получено равенство $e^i = 1$. А потому $i = \pi$.

Ну, и так далее…

В этих забавах есть нечто рациональное, именно среди полученных равенств есть верные!

Как Вы думаете, почему так получается?

На этом можно остановиться при изучении комплексных чисел. Если сделать хотя бы это (а есть еще много чего интересного), то можно рассчитывать на куда более полное их **понимание**. В частности, ученикам становится ясно, что "чисел вообще" нет. Нельзя потому сказать фразу, начинающуюся словами: " Числом называется…" Есть числа натуральные, целые,…комплексные. Хотелось бы также намекнуть на продолжение многовековой истории о числах, ибо теперь известны дуальные числа (такого же вида как комплексные с элементом, который в квадрате дает число 0), двойные числа (такого же вида как комплексные с элементом, который в квадрате дает число 1), гиперкомплексные, и - совсем в другую сторону - гипервещественные . Но это уже " другие песни". (3), (4), (19).

Выше я написал, что генетический подход способствует **пониманию**. Но как же убедиться в том? Из педагогики и психологии давно известно:

< Обнаруживается понимание тогда, когда появляются вопросы. > (19)

Когда мы спрашиваем:" Что непонятно?" , а ученик заявляет, что ему все понятно - вот тут - то и звучит для учителя сигнал тревоги. И я уже давно не произношу таких слов - они просто "шум" на уроке. Взамен должна быть предложена операциональная проверка **понимания**. Например. Если я даю задание разобраться в каком-нибудь фрагменте учебника, то настаиваю на том, чтобы этот фрагмент был прочитан минимум три раза. В результате первого прочтения надо получить представление о тексте в целом и разобраться в его структуре. В результате второго прочтения должны появиться вопросы по тексту и постараться на них ответить самостоятельно. В результате третьего прочтения должны появиться вопросы содержательного характера.

Приведу примеры возможных вопросов про комплексные числа.

1. Число i, а с ним и все комплексные числа появились, когда мы решаем уравнение $x^2 + 1 = 0$. Можно ли было сразу рассматривать квадратное уравнение общего вида с отрицательным дискриминантом и ввести некие новые "числа" (опять хочется сказать "бяки") для решения именно такого уравнения? И если да, то будет ли полученное множество являться числовым множеством, причем именно множеством комплексных чисел?

2.Нельзя ли построить теорию таких "чисел", которые решают любое квадратное уравнение, независимо от знака дискриминанта? Иначе говоря, рассмотрим множество "чисел", которые являются корнями произвольного квадратного уравнения. Вопрос тот же: будет ли полученное множество являться числовым множеством, причем именно множеством комплексных чисел?

Ответы на вопросы 1 и 2 можно найти в (3)

3. Всякое ли уравнение с элементарными функциями, которое мы не могли решить раньше, теперь можно решить? Например, имеет ли решение любое показательное уравнение?

(Ответ - нет. Например, уравнение $e^x = 0$ не имеет решения и на множестве комплексных чисел.)

4. При переходе от множества вещественных чисел к множеству комплексных чисел алгебраическое уравнение приобретает новые корни - примеры очевидны. А как обстоят дела с трансцедентными уравнениями. Например, появляются ли новые корни при решении таких уравнений: $\ln x = 1$, $\mathrm{tg}\, x = 1$?

(Ответы на эти вопросы можно найти в (21))

5. Будут ли числами векторы в трехмерном пространстве, хотя бы при некоторых дополнительных договоренностях?

(Ответ - нет. По этому поводу можно прочитать в (22))

6. До каких пор можно обобщать понятие числа?

Ответ интересен своей окончательностью. Множество комплексных чисел не может быть расширено так, чтобы в расширенном множестве сохранялись все законы действий, выполнимых на множестве комплексных чисел - установлено Вейерштрассом (23).

Несколько слов в заключение. Изучение комплексных чисел в школе ставит ученика в чрезвычайно сложную психологическую ситуацию, когда он вынужден пересматривать устоявшуюся точку зрения. Несколько лет ему внушали, что при возведении в квадрат не может получиться отрицательное число, даже оценки снижали, если он такое не учитывал, а тут - на тебе. Процесс пересмотра точки зрения характерен для развития науки, но порой мучителен для профессиональных ученых, тому в истории науки есть ярчайшие примеры (24). Именно ввиду "характерности и мучительности" я полагаю необходимым изучение комплексных чисел в средней школе, причем не только в математической, но и во всякой прочей, а особенно в гуманитарной (в последней - хотя бы знакомство с ними). А то ведь наши ученики, погруженные в мир готового, сформировавшегося, препарированного и адаптированного знания, так и будут пребывать в уверенности, что математики всегда и все знали чуть ли не заранее: и что такое число, и что такое функция, и что такое многогранник…Что они сначала дают определения, а уже потом начинают аккуратнейшим образом все по порядку доказывать. Словом, что в реальной истории науки все происходит именно так, как написано в их учебниках. Отнюдь.

А закончу я слегка загадочным ответом Пуанкаре на собственный вопрос: " Сможем ли мы когда-нибудь сказать, что мы понимаем теорию, если хотим придать ей сразу окончательную форму, которую навязывает ей безукоризненная логика, чтобы не осталось никакого следа от действий наугад, которые к ней привели? Нет, в действительности мы не сможем ее понять, не сможем даже запомнить. Не сможем запомнить, даже если выучим наизусть."

Литература.

1. Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. Алгебра, М., Наука, 1966

2.Г.В. Дорофеев. О некоторых вопросах, связанных с формальным определением комплексных чисел" (Сб. Углубленное изучение алгебры и анализа, М.,Просвещение,1977).
3.И. М. Яглом. Комплексные числа , М., Физматгиз, 1963
4.К.Р. Поппер. Объективное знание, М., УРСС, 2002
5. И.А. Гибш. Алгебра, М., Просвещение, 1960
6. Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. Алгебра и теория чисел. Часть I , М., Просвещение, 1974
7. И.В. Арнольд. Теоретическая арифметика, М., Учпедгиз, 1939
8. Р. С. Гутер, Ю.Л. Полунов. Джироламо Кардано. М., Знание, 1980.
9. В.Н. Молодший . Основы учения о числе в XYIII и начале XIX века, М., Учпедгиз, 1963 .
10. Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова, За страницами учебника математики, М., Просвещение, 1996.
11. Р. Пенроуз. Новый ум короля , М., УРСС, 2003 ,
12. М. Гарднер. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам, М., Мир, 1993
13. П.С . Моденов . Задачи по геометрии, М.,Наука,1979
14. З.А Скопец. Геометрические миниатюры, М.,Просвещение,1990
15. Я.П.Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах, М.,МЦНМО, 2004
16. В.А.Любецкий. Основные понятия школьной математики, М., Просвещение, 1987
17. В.Г. Ашкинузе, Н. Н. Шоластер. Алгебра и элементарные функции, М., Просвещение, 1964
18. В.А.Успенский. Нестандартный, или неархимедов, анализ. М., Знание, 1983
19. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973
20. Л.П. Доблаев. Смысловая структура учебного текста и проблемы его понимания, М., Педагогика, 1982
21. А.И. Маркушевич. Целые функции, М., Наука, 1975
22. В.И. Арнольд, Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов, М., МНЦМО, 2002
23. Математический энциклопедический словарь, М., Советская энциклопедия, 1988
24. Д.Д. Мордухай - Болтовской. Философия, Психология, Математика, М., Серебряные нити, 1998